



Relaciones y funciones

¿Qué encontrará esta semana?



¡Osadía hasta la cumbre!



Relaciones y funciones



Valuar funciones



Diagrama sagital de una relación y una función

Competencia:

Utiliza modelos matemáticos (relaciones, funciones y ecuaciones) en la representación y comunicación de resultados.

Esta semana logrará:

- ✓ Aplicar relaciones y funciones a aspectos de la vida real.
- ✓ Identificar los conjuntos dominio y codominio de una relación.
- ✓ Relacionar el procedimiento para calcular el conjunto imagen de una función con su representación gráfica.
- ✓ Practicar la agilidad de cálculo mental valuando funciones.
- ✓ Deducir una relación o una función a partir de su diagrama sagital.
- ✓



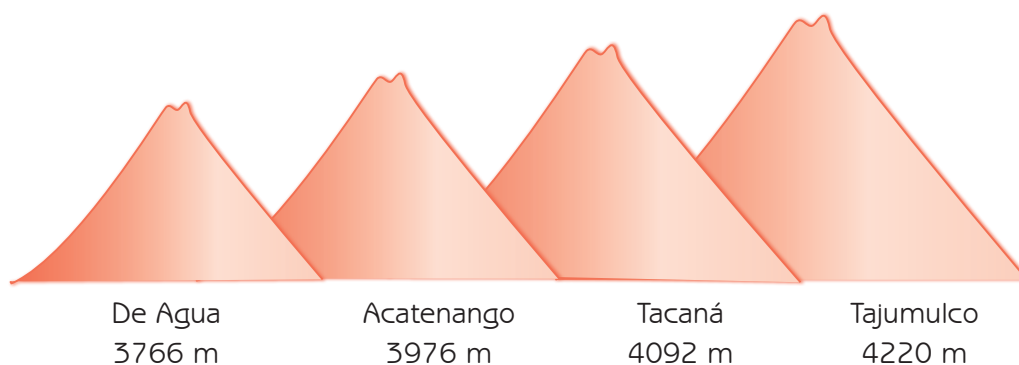
¡Para comenzar!

¡Osadía hasta la cumbre!

Un grupo de escaladores se ha propuesto llegar a la cima de estos cuatro volcanes: De Agua, Acatenango, Tacaná y Tajumulco.

Subirán dos volcanes en junio y los otros dos en diciembre. Cada vez que escalen subirán primero el volcán de menor altura.

La altura de cada volcán se muestra en la gráfica siguiente.



¿Qué opciones pueden combinar para escalar?

Para contestar la pregunta, podemos establecer la **relación** "El volcán **a** es más bajo que el volcán **b**", y realizar las combinaciones que resulten verdaderas.

Una opción es: primero Acatenango y después Tacaná, porque la altura del volcán Acatenango es menor que el de Tacaná.

¡A trabajar!

Realice dos combinaciones de escalada posibles, por medio de pares ordenados. Explique su respuesta. Fíjese en el ejemplo.

0) *(Tacaná, Tajumulco) porque el volcán Tacaná es más bajo que el volcán Tajumulco.*

1)

2)



El mundo de la matemática

1. Relaciones

En nuestra vida diaria establecemos continuamente relaciones entre personas, objetos, números, etc. Por ejemplo: *a cada guatemalteco o guatemalteca mayor de edad nos corresponde un número de DPI.*

En matemática una relación se representa con la letra **R** y se define así:

Una relación es la correspondencia entre dos conjuntos A y B, tal que cada elemento del conjunto A se relaciona con **uno o más** elementos del conjunto B, a través de una condición.

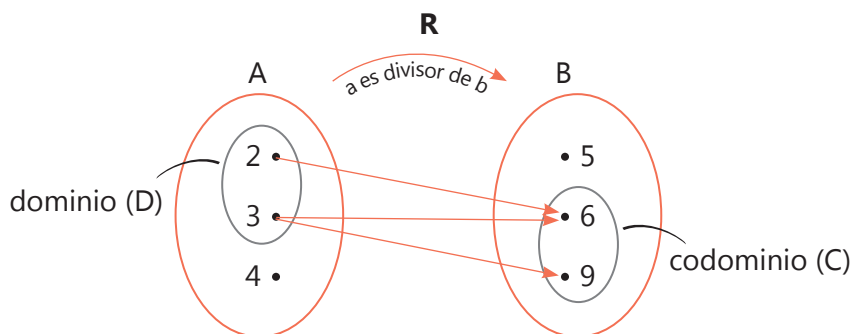
Los elementos que cumplen esa condición forman dos conjuntos.

- **Dominio** o **conjunto origen**: es el conjunto formado por los elementos del conjunto inicial o conjunto A que tienen imagen en B.
- **Codominio** o **conjunto imagen**: es el conjunto formado por los elementos del conjunto final o conjunto B que son imagen de A.

1.1 Representación gráfica de una relación

Una forma sencilla de representar una relación es a través de un **diagrama sagital**. Consiste en dibujar dos óvalos en los cuales escribiremos los elementos de cada conjunto A y B, e indicaremos la relación entre ellos por medio de flechas. Veamos un ejemplo.

Dados los conjuntos: $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 9\}$ y la relación **R**: "*a es divisor de b*". La representación gráfica de la relación **R** en un diagrama sagital es la siguiente.



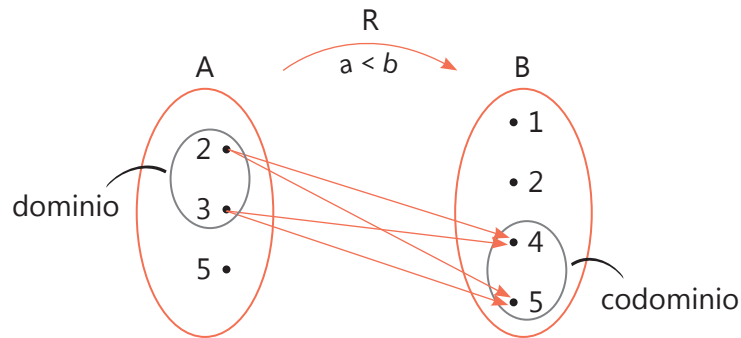
¡Atención!
Los números que **no** cumplen con la condición, **no** forman parte ni del dominio ni del codominio.

Observe, el conjunto **dominio** está formado por los elementos 2 y 3 porque solo ellos tienen imagen en el codominio, de acuerdo a la relación **R**. $D = \{2, 3\}$

El conjunto **codominio** está formado por los elementos 6 y 9 porque solo ellos son imagen de los elementos del dominio. $C = \{6, 9\}$

¡Otro ejemplo!

Dados los conjuntos $A = \{ 2, 3, 5 \}$ y $B = \{ 1, 2, 4, 5 \}$, representemos en un diagrama sagital la relación R : "a es menor que b" ($a < b$).



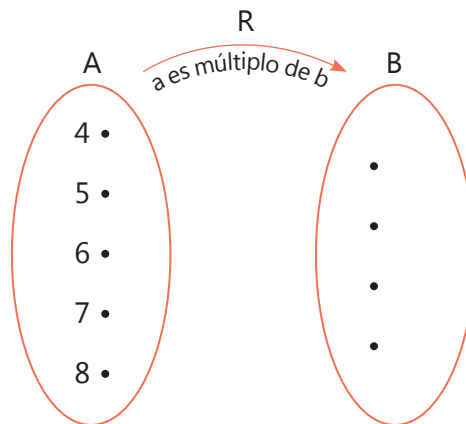
El conjunto **dominio** está formado por los elementos 2 y 3 del conjunto A.
 $D = \{ 2, 3 \}$

Los elementos 4 y 5 del conjunto B forman el **codominio** de la relación.
 $C = \{ 4, 5 \}$

➔ Ejercicio 1

Dados los conjuntos $A = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$ y $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ y la relación R : "a es múltiplo de b".

- Complete el diagrama sagital con los elementos de cada conjunto y establezca la relación dibujando flechas desde cada elemento del dominio hacia su imagen.



- Escriba los elementos que forman cada conjunto.

- Conjunto inicial: $A = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$
- Conjunto dominio: $D = \{ \dots \}$
- Conjunto final: $B = \{ \dots \}$
- Conjunto codominio: $C = \{ \dots \}$

2. Funciones

Una función se representa con la letra f y se define así:

Una función es un tipo de relación o correspondencia entre dos conjuntos X y Y , en la cual todos los elementos del conjunto inicial tienen **una y solo una imagen** en el conjunto final.

Simbólicamente podemos representar una función de dos formas:

$f: X \rightarrow Y$ Se lee "función de X en Y ".

$f(x) = y$ Se lee " f de x igual a y ".

En una función también se distinguen los conjuntos:

- **Dominio** o **conjunto inicial**, formado por todos los valores que puede tomar la variable x , según la función establecida.
- **Codominio** o **conjunto imagen**, formado por todos los valores que adquiere y al aplicar la función a cada valor x .

En una función, x puede tomar cualquier valor, por eso recibe el nombre de **variable independiente**. Sin embargo, el valor de y depende del valor de x y de la función aplicada, por eso recibe el nombre de **variable dependiente**.

Veamos un ejemplo

Una libra de azúcar cuesta 4 quetzales. El total que gastemos estará en función de la cantidad de libras que compremos.

1 lb	→	Q4.00
2 lb	→	Q8.00
3 lb	→	Q12.00
⋮		⋮
x lb	→	$Q4(x).00$



En el ejemplo, el número de libras de azúcar es la variable independiente. El precio es la variable que depende del número de libras de azúcar.

El precio, en función de las libras de azúcar, se puede representar simbólicamente:

$$f(x) = 4x = y$$

Por ejemplo, si queremos hallar el precio de 25 lb de azúcar, sustituimos x por 25 en la función $f(x) = 4x$. Observe:

$$f(x) = 4x$$
$$f(25) = 4(25) = 100$$

El valor que hallamos (100) es el valor que adquiere y después de aplicar la función al valor x .

$$\text{Si } x = 25 \longrightarrow y = 100$$

Por lo tanto, a 25 lb le corresponde un único precio, cuyo valor es Q100.00.

2.1 Representación gráfica de una función

También podemos representar una función en un diagrama sagital, como en las relaciones.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- Asignamos una serie de valores al conjunto dominio (valor de x), de preferencia valores cercanos a cero, por ejemplo $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- Calculamos el valor de las imágenes sustituyendo el valor de x en la función $f(x)$ y realizamos las operaciones indicadas.
- Copiamos los valores obtenidos en un diagrama sagital.

Siga con atención el ejemplo.

Representemos en un diagrama sagital la función $f(x) = 4x$.



Los valores que obtenemos después de aplicar la función a cada valor x , son los valores de y , como vemos en el procedimiento y en el diagrama sagital.

$$f(x) = 4x = y$$

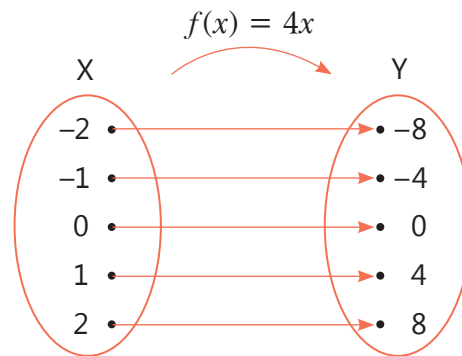
$$f(-2) = 4(-2) = -8$$

$$f(-1) = 4(-1) = -4$$

$$f(0) = 4(0) = 0$$

$$f(1) = 4(1) = 4$$

$$f(2) = 4(2) = 8$$



Observe que el conjunto inicial es a la vez el conjunto dominio porque todos los elementos tiene imagen.

¡Otro ejemplo!

Representemos en un diagrama sagital la función $f(x) = x^2$.

$$f(x) = x^2 = y$$

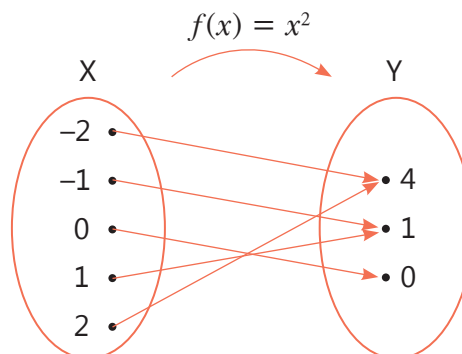
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$



➔ Ejercicio 2

Represente cada función en un diagrama sagital. Elija los valores $-2, -1, 0, 1$ y 2 para el conjunto dominio y aplique la función a cada valor para hallar las imágenes. Guíese por el ejemplo.

0) $f(x) = 3x = y$

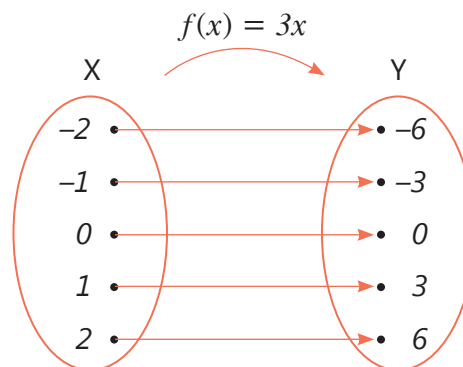
$f(-2) = 3(-2) = -6$

$f(-1) = 3(-1) = -3$

$f(0) = 3(0) = 0$

$f(1) = 3(1) = 3$

$f(2) = 3(2) = 6$



1) $f(x) = x + 2 = y$

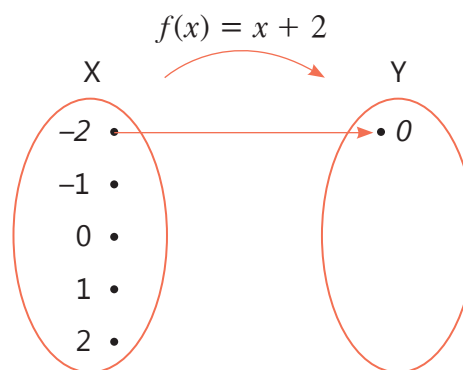
$f(-2) = (-2) + 2 = 0$

$f(-1) = \dots$

$f(0) = \dots$

$f(1) = \dots$

$f(2) = \dots$



2) $f(x) = x - 1 = y$

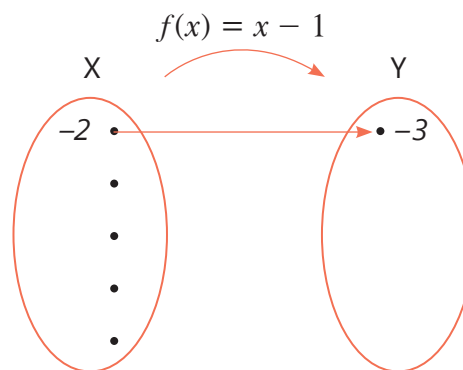
$f(-2) = (-2) - 1 = -3$

$f(-1) = \dots$

$f(0) = \dots$

$f(1) = \dots$

$f(2) = \dots$





Resumen

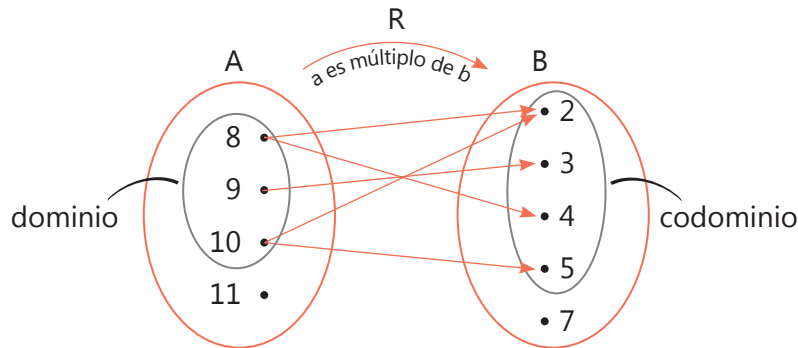
1. En matemática una relación se representa con la **R** y se define así:

Una relación es una correspondencia entre dos conjuntos A y B, tal que cada elemento del conjunto A se relaciona con **uno o más** elementos del conjunto B, a través de una condición.

Los elementos que cumplen con esa condición forman dos conjuntos:

- **Dominio** o **conjunto origen**: es el conjunto formado por los elementos del conjunto inicial o conjunto A que tienen imagen en B.
- **Codominio** o **conjunto imagen**: es el conjunto formado por los elementos del conjunto final o conjunto B que son imagen de A.

1.1 Una relación se puede representar gráficamente en un diagrama sagital.



2. Una función se representa con la letra **f** y se define así:

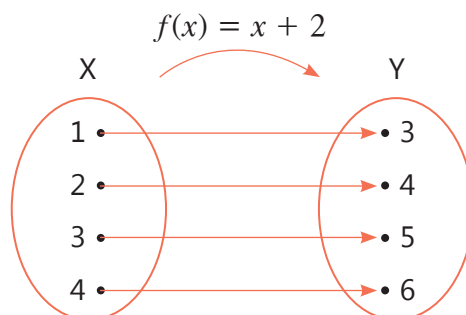
Una función es un tipo de relación o correspondencia entre dos conjuntos X y Y, en la cual todos los elementos del conjunto inicial tienen **una y solo una imagen** en el conjunto final.

Simbólicamente una función se expresa como:

$f: X \rightarrow Y$ Se lee "función de X en Y".

$f(x) = y$ Se lee "f de x igual a y".

2.1 Una función se puede representar gráficamente en un diagrama sagital.





Autocontrol

➔ Actividad 1. Demuestre lo aprendido

Rellene el círculo de la opción que responde correctamente cada pregunta.

- 1) En una función, ¿qué otro nombre recibe el conjunto origen?
 - imagen
 - dominio
 - codominio

- 2) Si $x = 0$ en la función $f(x) = x + 1$, ¿cuál es el valor de la imagen?
 - 0
 - 1
 - 1

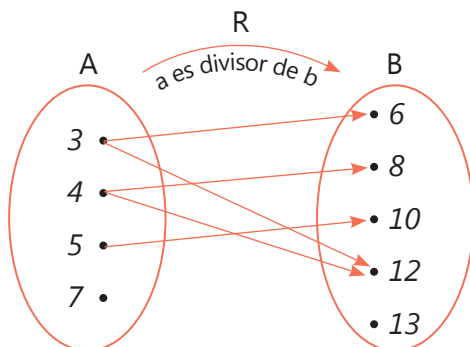
- 3) ¿Qué otro nombre recibe el conjunto de las imágenes de una función?
 - dominio
 - codominio
 - conjunto universo

- 4) Si $x = 1$ en la función $f(x) = 5x + 2$, ¿cuál es el valor de la imagen?
 - 2
 - 1
 - 7

➔ Actividad 2. Practique lo aprendido

A. Represente en un diagrama sagital cada relación y escriba en el espacio indicado los conjuntos dominio (D) y codominio (C). Guíese por el ejemplo 0.

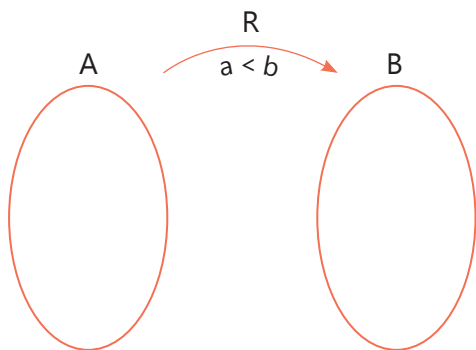
0) Dados los conjuntos $A = \{ 3, 4, 5, 7 \}$, $B = \{ 6, 8, 10, 12, 13 \}$ y la relación R: "a es divisor de b".



$$D = \{ \underline{3, 4, 5} \dots \dots \dots \}$$

$$C = \{ \underline{6, 8, 10, 12} \dots \dots \dots \}$$

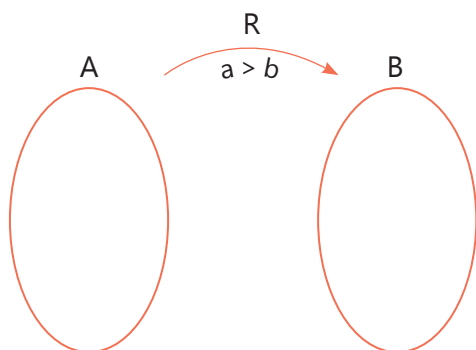
1) Dados los conjuntos $A = \{ 3, 8, 9, 11 \}$, $B = \{ 2, 6, 9, 10 \}$ y la relación R : " $a < b$ ".



$D = \{ \dots \}$

$C = \{ \dots \}$

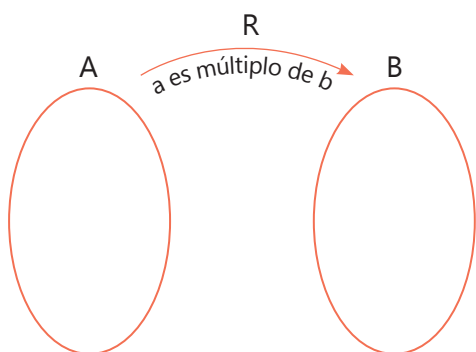
2) Dados los conjuntos $A = \{ 1, 2, 4, 6 \}$, $B = \{ 2, 4, 5 \}$ y relación R : " $a > b$ ".



$D = \{ \dots \}$

$C = \{ \dots \}$

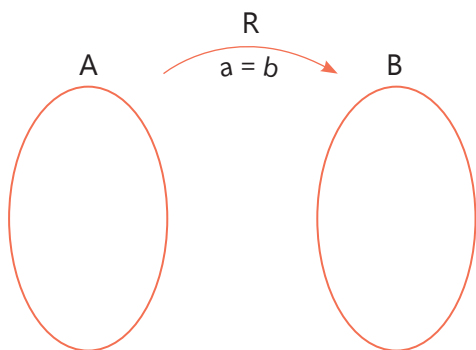
3) Dados los conjuntos $A = \{ 7, 8, 9, 10 \}$, $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ y la relación R : " a es múltiplo de b ".



$D = \{ \dots \}$

$C = \{ \dots \}$

4) Dados los conjuntos $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$, $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$ y la relación R : " $a = b$ ".



$D = \{ \dots \}$

$C = \{ \dots \}$

B. Represente cada función en un diagrama sagital. Elija los valores $-2, -1, 0, 1$ y 2 para el conjunto dominio y aplique la función a cada valor para hallar las imágenes. Fijese en el ejemplo.

1) $f(x) = x + 1 = y$

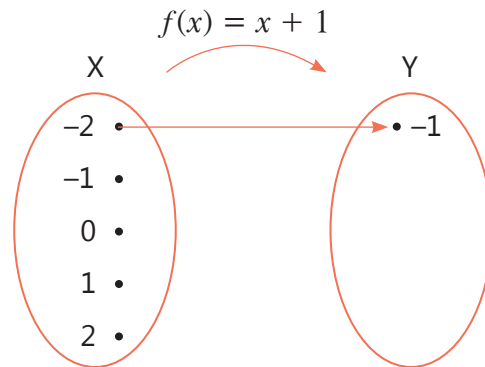
$f(-2) = (-2) + 1 = -1$

$f(-1) = \dots\dots\dots$

$f(0) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$



2) $f(x) = 5x = y$

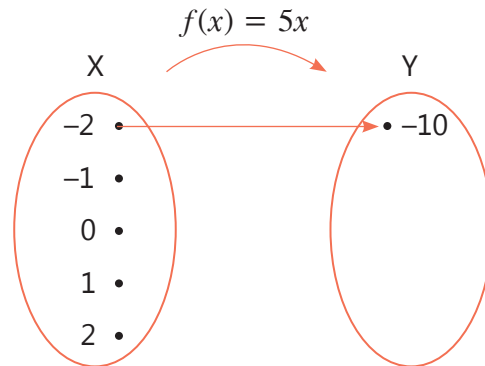
$f(-2) = 5(-2) = -10$

$f(-1) = \dots\dots\dots$

$f(0) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$



3) $f(x) = 2x + 1 = y$

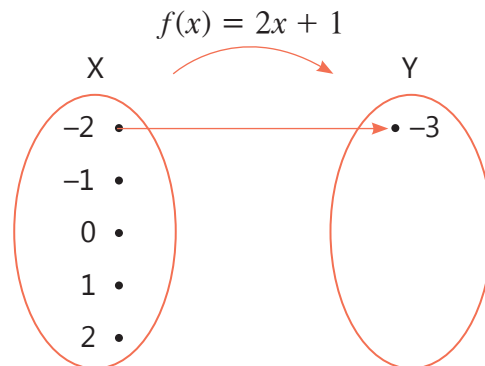
$f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$

$f(-1) = \dots\dots\dots$

$f(0) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(2) = \dots\dots\dots$



C. Realice en su cuaderno la representación gráfica de cada función en un diagrama sagital. Elija los valores $1, 2, 3$ y 4 para el dominio.

1) $f(x) = 2x$

2) $f(x) = 10x$

3) $f(x) = x + 5$

4) $f(x) = x - 2$

5) $f(x) = 2x - 2$

6) $f(x) = 3x - 1$



Agilidad de cálculo mental

Sustituya mentalmente el valor de x asignado para hallar el valor de su imagen. Fíjese en los ejemplos.

A.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 0) $f(3) = x + 1 =$ <u>4</u> | 11) $f(8) = x - 6 =$ <u>2</u> |
| 1) $f(0) = x + 2 =$ | 12) $f(7) = x - 3 =$ |
| 2) $f(4) = x + 1 =$ | 13) $f(3) = x - 1 =$ |
| 3) $f(9) = x + 11 =$ | 14) $f(1) = x - 5 =$ |
| 4) $f(3) = x + 7 =$ | 15) $f(9) = x - 2 =$ |
| 5) $f(7) = x + 5 =$ | 16) $f(5) = x - 3 =$ |
| 6) $f(2) = x + 2 =$ | 17) $f(4) = x - 4 =$ |
| 7) $f(1) = x + 6 =$ | 18) $f(7) = x - 6 =$ |
| 8) $f(0) = x + 15 =$ | 19) $f(0) = x - 7 =$ |
| 9) $f(6) = x + 21 =$ | 20) $f(10) = x - 20 =$ |
| 10) $f(5) = x + 10 =$ | 21) $f(15) = x - 12 =$ |

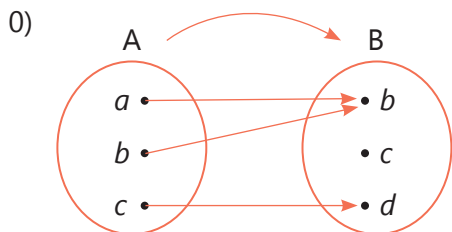
B.

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 0) $f(3) = 2x + 1 =$ <u>7</u> | 11) $f(2) = 2x - 6 =$ <u>-2</u> |
| 1) $f(0) = 9x + 6 =$ | 12) $f(5) = 2x - 8 =$ |
| 2) $f(4) = 4x + 4 =$ | 13) $f(7) = 2x - 5 =$ |
| 3) $f(9) = 3x + 1 =$ | 14) $f(9) = 2x - 2 =$ |
| 4) $f(3) = 8x + 6 =$ | 15) $f(2) = 6x - 3 =$ |
| 5) $f(7) = 2x + 2 =$ | 16) $f(4) = 5x - 9 =$ |
| 6) $f(2) = 9x + 7 =$ | 17) $f(7) = 8x - 4 =$ |
| 7) $f(4) = 2x + 9 =$ | 18) $f(8) = 6x - 10 =$ |
| 8) $f(0) = 5x + 15 =$ | 19) $f(10) = 4x - 20 =$ |
| 9) $f(10) = 3x + 10 =$ | 20) $f(15) = 2x - 25 =$ |
| 10) $f(15) = 2x + 20 =$ | 21) $f(20) = 3x - 20 =$ |

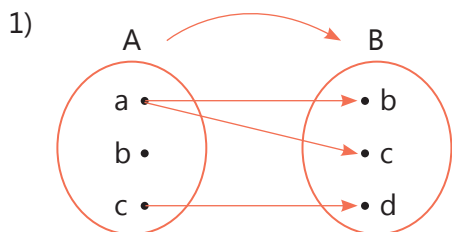


Razonamiento lógico

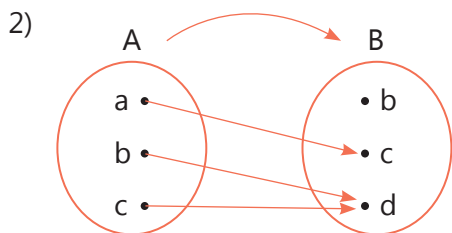
A. En una **relación**, a cada elemento del dominio le corresponde **una o más** imágenes en el codominio. En una **función**, a cada elemento del dominio le corresponde **una y solo una** imagen en el dominio. De acuerdo a estas afirmaciones, escriba si cada diagrama sagital representa una función o una relación. Explique su respuesta. El ejercicio 0 le sirve de ejemplo.



Es una función porque a cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen en el codominio.

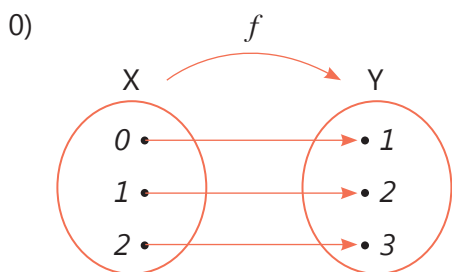


.....

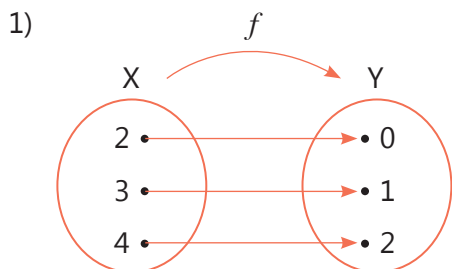


.....

B. Escriba la función $f(x)$ que corresponde a cada diagrama sagital. Explique su respuesta. Fíjese en el ejemplo.

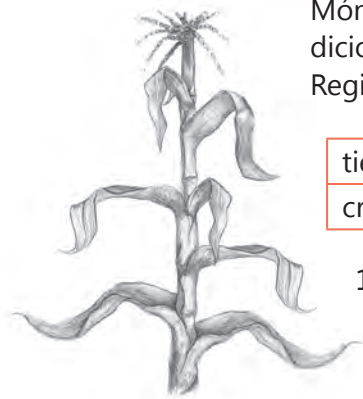


La función es $f(x) = x + 1$ porque a cada elemento del dominio le corresponde una unidad más en el codominio.



.....

Desarrolle nuevas habilidades



Mónica y Fidel decidieron observar el crecimiento de una planta de maíz en condiciones favorables (buena iluminación solar, buen clima, humedad necesaria). Registraron los resultados obtenidos en la tabla siguiente:

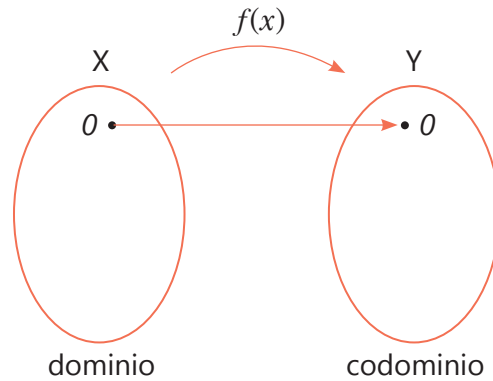
tiempo en semanas	0	1	2	3	4	...	x
crecimiento en cm	0	9	18	27	36	...	$9x$

- 1) Explique con sus palabras el significado de los datos en la tabla.

.....

.....

- 2) Represente en un diagrama sagital el crecimiento de la planta en función del tiempo. Escriba en el dominio el valor del tiempo, en el codominio el valor del crecimiento.



- 3) Con los resultados del diagrama, ¿cuál es la función $f(x)$ que corresponde al crecimiento en función del tiempo? Explique su respuesta.

.....



Revise su aprendizaje

Marque con un cheque la casilla que mejor indique su rendimiento.

Después de estudiar...

- Aplico relaciones y funciones a aspectos de la vida real.
- Identifico los conjuntos dominio y codominio de una relación.
- Relaciono el procedimiento para calcular el conjunto imagen de una función con su representación gráfica.
- Practico el cálculo mental valuando funciones.
- Deduzco una relación o una función a partir de su diagrama sagital.

logrado	en proceso	no logrado