El cono

¿Qué encontrará esta semana?

El programa Apolo

El cono: área y volumen

Sumas y restas algebraicas

Problemas de área y volumen del cono

Competencia:

Produce patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones.

Esta semana logrará:

- ✓ Conocer la forma de la nave Apolo.
- ✓ Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cono.
- ✓ Aplicar las fórmulas de área y volumen del cono para resolver problemas.
- ✓ Resolver con agilidad sumas y restas algebraicas.
- ✓ Construir un cono de papel.
- ✓ ....

¡Para comenzar!

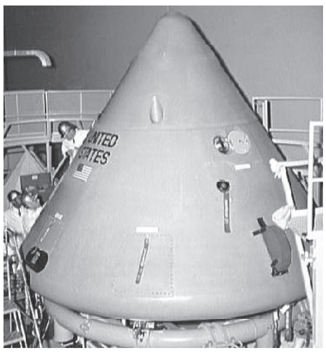
El programa Apolo

¡El hombre a la Luna!

En 1969 ocurrió uno de los hechos históricos más sobresalientes de la humanidad, tres astronautas viajaron a la Luna, dos caminaron sobre ella y todos regresaron a la Tierra sanos y salvos. Esta increíble hazaña fue posible gracias al programa Apolo, un conjunto de misiones espaciales que tuvieron como objetivo explorar la superficie lunar.

La nave en la que viajaron los astronautas estaba compuesta por varios módulos. El más importante era el módulo de mando, un vehículo encargado de transportar a los astronautas hasta la Luna, mantenerlos allí y regresarlos a la Tierra.

http://goo.gl/fo2yLX



Módulo de mando

Este módulo tenía forma de cono, con una altura de 3.18 metros y una base de 3.90 metros de diámetro. Se construyó con esta forma porque ayudaba a dispersar el calor generado por el roce con las capas de la atmósfera terrestre. Además, reducía la velocidad del vehículo al reentrar en la Tierra.

¡A trabajar!

Responda las preguntas.

1) ¿Cuál es el nombre del programa de misiones que llevó al hombre a la Luna?

....

2) ¿Qué forma tenía el módulo de mando?

....

¿Le gustaría viajar a la Luna? Desde hace un tiempo se promueve el turismo espacial. Escriba un relato corto que responda a estas preguntas: ¿Cómo sería el viaje? ¿Qué le gustaría ver?

....

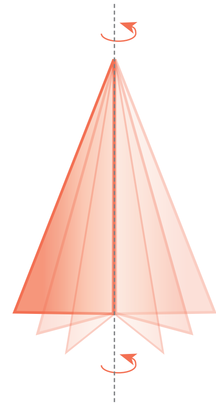
....

....

....

El mundo de la matemática

1. El cono

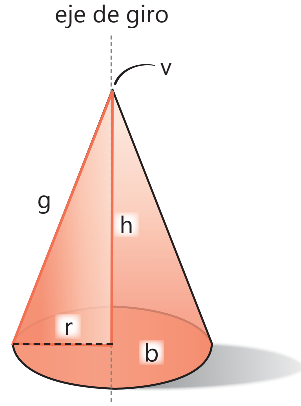


En la sección anterior vimos que el módulo principal de la nave Apolo tenía forma de cono. En nuestro entorno, podemos encontrar varios objetos con este mismo diseño: embudos, conos para helado y conos para la señalización de caminos.

El cono se define como un cuerpo geométrico formado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de la línea que determina su altura. El triángulo, al girar, forma una superficie lateral curva y un círculo que da origen a la base.

Elementos del cono

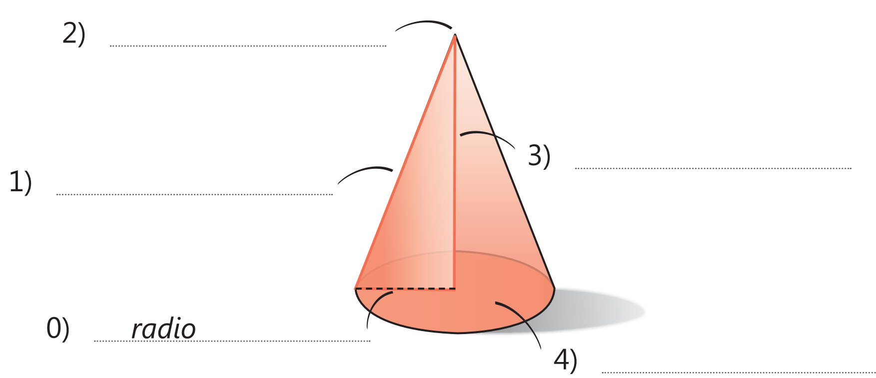
En un cono se pueden distinguir los elementos siguientes:



- **Eje de giro:** es una línea imaginaria vertical fija sobre la cual gira el triángulo rectángulo.
- **Base (b):** círculo sobre el que descansa el cono.
- **Radio (r):** distancia del centro de la base a cualquier punto de la circunferencia.
- **Vértice (v):** es la cúspide del cono.
- **Generatriz (g):** es la línea trazada desde el vértice hasta un punto del contorno de la base.
- **Altura (h):** distancia que va del centro de la base hasta el vértice.

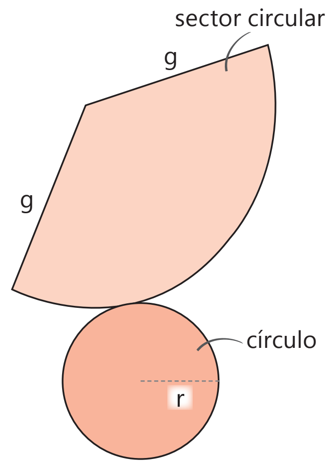
Ejercicio 1

Escriba el nombre de los elementos del cono señalados en el esquema. Tiene un ejemplo.



1.1 Área del cono

Para conocer el área total del cono necesitamos descomponerlo en las partes que lo forman. Al extender el cono sobre un plano se obtienen dos áreas, un círculo y un sector circular. Fíjese en la figura de la derecha.



Para calcular el área del cono, debemos averiguar la medida de ambas figuras: el **área lateral**, que es el área del sector circular, y el **área de la base**, que es el área del círculo.

a. Área lateral (A_l)

Es el área del sector circular que forma el cono y la obtenemos con la fórmula:

$$\mathbf{A_l = \pi rg}$$

La fórmula se lee: *el área lateral de un cono es igual a pi por el radio y por la generatriz.*

π = 3.14
r = radio del círculo de la base
g = generatriz

b. Área de la base (A_b)

Es el área del círculo donde descansa el cono. Como el área de un círculo es πr^2, entonces el área de la base del cono es:

$$\mathbf{A_b = \pi r^2}$$

La fórmula se lee: *el área de la base es igual a pi por la medida del radio al cuadrado.*

c. Área total del cono (A_t)

El área total se obtiene al sumar el área lateral y el área de la base.

$$\mathbf{A_t = A_l + A_b}$$

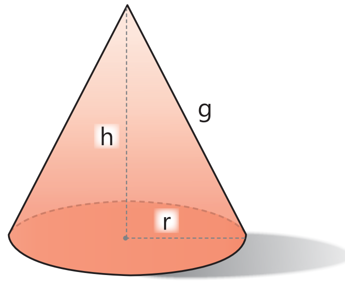
$$\mathbf{A_t = \pi rg + \pi r^2}$$

Como el valor de pi y del radio (πr) aparece dos veces podemos aplicar el factor común para expresar el área total del cono de una forma más simple:

$$\mathbf{A_t = \pi r(g + r)}$$

La fórmula se lee: *el área total del cono es igual a pi por el radio y por la suma del valor de la generatriz más el radio.*

Resolvamos un ejemplo de aplicación del área total del cono.



Se desea elaborar un cono cerrado de dos colores. El área lateral de color rojo y la base de color azul. Si el radio mide 10 cm y la generatriz 15 cm, ¿qué cantidad de cartulina de cada color se necesita? ¿Cuál es el total de la cartulina empleada?

- Calculamos el área lateral $A_l = \pi rg$

  Sustituimos los datos en la fórmula y operamos

  $A_l = (3.14)(10\text{ cm})(15\text{ cm})$

  $A_l = (3.14)(150\text{ cm}^2)$

  Cartulina roja $\mathbf{A_l = 471\text{ cm}^2}$

- Calculamos el área de la base $A_b = \pi r^2$

  Sustituimos los datos en la fórmula y operamos

  $A_b = (3.14)(10\text{ cm})^2$

  $A_l = (3.14)(100\text{ cm}^2)$

  Cartulina azul $\mathbf{A_l = 314\text{ cm}^2}$

Para saber qué cantidad de cartulina se ha empleado hallamos el área total.

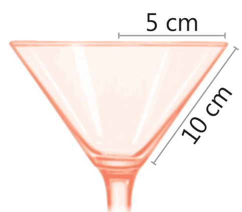
- Como ya sabemos el área lateral y de la base, aplicamos esta fórmula $A_t = A_l + A_b$

  Sustituimos los datos en la fórmula y operamos

  $A_t = 471\text{ cm}^2 + 314\text{ cm}^2$

  Cartulina total empleada $\mathbf{A_t = 785\text{ cm}^2}$

Otro ejemplo



Una copa con forma de cono mide 10 cm de generatriz y 5 cm de radio en la circunferencia superior. Cada vez que se limpia, ¿qué superficie de vidrio hay que limpiar?

Atención: el problema se resuelva hallando solo el área lateral porque la copa está abierta, es decir, no tiene base.

- Calculamos el área lateral $A_l = \pi rg$

  Sustituimos los datos en la fórmula y operamos

  $A_l = (3.14)(5\text{ cm})(10\text{ cm})$

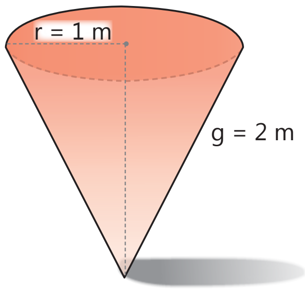
  $A_l = (3.14)(50\text{ cm}^2)$

  $\mathbf{A_l = 157\text{ cm}^2}$

  Hay que limpiar 157 cm² de vidrio.

Veamos un ejemplo en el que aplicaremos directamente la fórmula del área total del cono.

Calculemos el costo de producción de una cisterna de acero con forma de cono invertido que mide 1 metro de radio y 2 metros de generatriz. El metro cuadrado de acero cuesta Q1,500.00.



- Calculamos el área total $A_t = \pi r(g + r)$

  Sustituimos los datos en la fórmula y operamos

  $A_t = (3.14)(1\text{ m})(2\text{ m} + 1\text{ m})$

  $A_t = (3.14)(1\text{ m})(3\text{ m})$

  $A_t = (3.14)(3\text{ m}^2)$

  $\mathbf{A_t = 9.42\ m^2}$

- Multiplicamos el resultado por el precio de cada metro cuadrado de acero $(9.42)(1500) = 14\ 130$

El costo de producción de la cisterna es de Q14,130.00.

Ejercicio 2

Aplique el procedimiento que aprendió para resolver el problema.

Un ingeniero debe construir un silo de almacenamiento con forma cónica de 3 metros de radio y 4 metros de generatriz.

a. ¿Qué cantidad de aluminio necesita?

- Calcule el área total $A_t = \pi r(g + r)$

  Sustituya los datos en la fórmula y opere $A_t = (3.14)(\dots)(\dots)$

  $A_t = (3.14)(\dots)(\dots)$

  $A_t = (3.14)(\dots)$

  La cantidad de aluminio que necesita es $A_t = \dots$

b. Si quiere reforzar la base con acero inoxidable, ¿qué cantidad de acero necesita?

- Calcule el área de la base $A_b = \pi r^2$

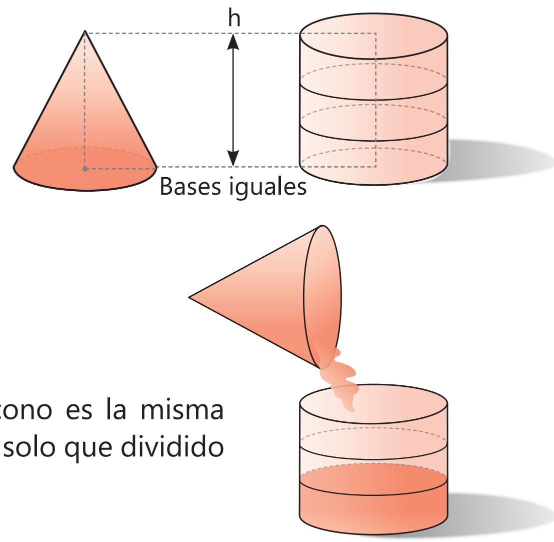
  Sustituya el dato en la fórmula y opere $A_b = (3.14)(\dots)^2$

  $A_b = (3.14)(\dots)$

  La cantidad de acero que necesita es $A_b = \dots$

1.2 Volumen del cono

Observe estos cuerpos geométricos. El cilindro está vacío y el cono está lleno de agua. Tanto la altura y el radio del cilindro como los del cono miden lo mismo.



Si vaciamos el líquido que está en el cono dentro del cilindro, llenaremos solo una tercera parte de la capacidad del cilindro. Eso quiere decir que el volumen del cono es la **tercera parte** del volumen de un cilindro.

Por eso, la fórmula para calcular el volumen del cono es la misma que utilizamos para calcular el volumen del cilindro, solo que dividido entre tres.

$$\mathbf{V = \frac{(A_b)(h)}{3}}$$

$\mathbf{A_b}$ = el área de la base del cono

h = altura del cono

Pero podemos hallar el volumen tomando un camino más corto.

Como la base siempre es un círculo, el área de la base tiene que ser la de un círculo ($A_b = \pi r^2$). Si sustituimos A_b por πr^2, la fórmula del volumen del cono queda así:

$$\mathbf{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Hagamos un ejemplo

Los vasos utilizados en una venta de granizadas tienen forma de cono. El radio mide 4 cm y la altura 10 cm. ¿Cuál es el volumen de cada vaso?

- Copiamos la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
- Sustituimos los valores en la fórmula y operamos

$$V = \frac{(3.14)(4\text{ cm})^2(10\text{ cm})}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(16\text{ cm}^2)(10\text{ cm})}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(160\text{ cm}^3)}{3}$$

$$V = \frac{502.4\text{ cm}^3}{3}$$

El volumen de cada vaso es $\mathbf{V = 167.47\text{ cm}^3}$

Otro ejemplo

En una fábrica de dulces se elaboran chupetes con forma cónica de 1 cm de radio y 6 cm de altura. ¿Cuántos chupetes se producen por cada litro de miel, sabiendo que 1 litro equivale a 1000 cm³?

Para resolver el problema primero debemos hallar el volumen de cada chupete.

- Copiamos la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
- Sustituimos los datos y operamos

$$V = \frac{(3.14)(1\text{ cm})^2(6\text{ cm})}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(1\text{ cm}^2)(6\text{ cm})}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(6\text{ cm}^3)}{3}$$

$$V = \frac{18.84\text{ cm}^3}{3}$$

El volumen es $\mathbf{V = 6.28\ cm^3}$

Para calcular la cantidad de chupetes dividimos el volumen total de la miel entre el volumen de cada chupete. (1 l = 1000 cm³)

$$1000\ \cancel{\text{cm}^3} \div 6.28\ \cancel{\text{cm}^3} = \mathbf{159.23}$$

Se producen 159 chupetes por cada litro de miel.

Ejercicio 3

Aplique el procedimiento que aprendió para resolver el problema.

Los vasos utilizados en una fiesta tienen forma de cono. Miden 3 cm de radio y 10 cm de altura.

a. ¿Cuál es la capacidad de cada vaso?

- Copie la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
- Sustituya los datos en la fórmula y opere

$$V = \frac{(3.14)(\qquad)^2(\qquad)}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(\qquad)(\qquad)}{3}$$

$$V = \frac{(3.14)(\qquad)}{3}$$

$$V = \frac{\ldots\ldots}{3}$$

$$V = \ldots\ldots$$

La capacidad de cada vaso es de .... **cm³**.

b. ¿Cuántos vasos se pueden llenar con 10 litros de jugo? Recuerde que 1 l equivale a 1000 cm^3.

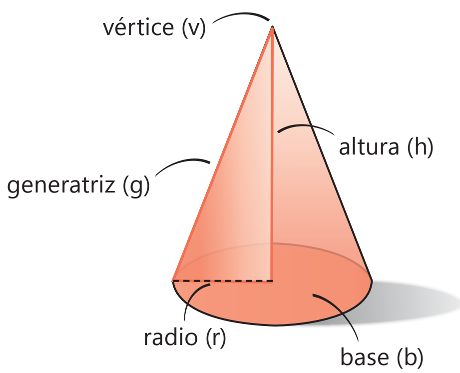
- Convierta los 10 litros en centímetros cúbicos (..........)(1000 cm^3) = ...
- Calcule el número de vasos, dividiendo el resultado anterior entre el volumen de cada vaso .... ÷ .... = ...

Se pueden llenar .... **vasos**.

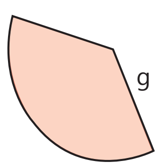
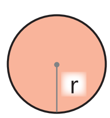
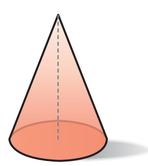
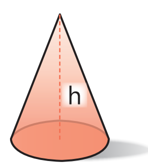
Resumen

El **cono** se define como un cuerpo geométrico formado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de la línea que determina su altura. El triángulo al girar forma una superficie lateral curva y un círculo que da origen a la base.

Los elementos de un cono son:



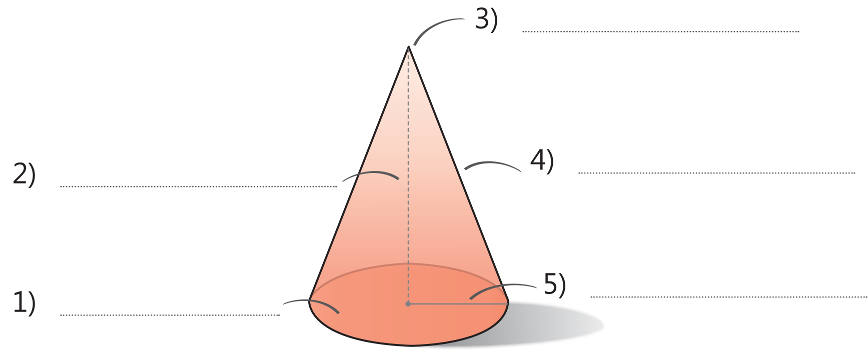
Para hallar el área y el volumen del cono, utilizamos las fórmulas siguientes:

Área lateral	Área de la base	Área total	Volumen
			
$A_l = \pi rg$	$A_b = \pi r^2$	$A_t = \pi r(g + r)$	$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Autocontrol

Actividad 1. Demuestre lo aprendido

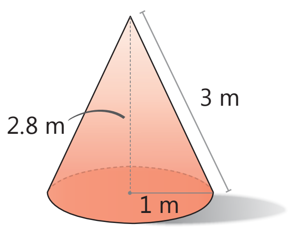
Escriba sobre la línea los elementos del cono señalados en el esquema.



Actividad 2. Practique lo aprendido

A. Calcule el área total y el volumen de cada cono con las medidas indicadas.

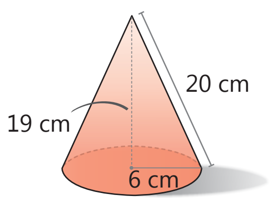
1)



Área total

Volumen

2)



Área total

Volumen

B. Aplique el procedimiento que aprendió en la semana para resolver los problemas.

1) Un artesano fabrica embudos de hojalata de 9 cm de radio y 18 cm de generatriz. ¿Qué cantidad de material necesita para cada embudo? ¿Cuántos embudos se pueden obtener de una plancha de hojalata que mide 5000 cm^2?

2) La NASA necesita construir un módulo de mando en forma cónica para una nave espacial. Debe tener 2 m de radio y 4 m de generatriz. ¿Cuál será el costo de producción del módulo si el metro cuadrado de acero cuesta Q5,000.00?

3) Un joyero elabora aretes de jade con forma de cono que miden 0.5 cm de radio y 1 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de cada arete? ¿Cuántos aretes se pueden obtener de una piedra de jade que tiene 5 cm^3 de volumen?

Agilidad de cálculo mental

Practique el cálculo mental con operaciones algebraicas.

A. Sume monomios. Recuerde que para resolver se suman los coeficientes numéricos y se copia la parte literal. Tiene un ejemplo.

0) $2x + 2x = \underline{4x}$
1) $y + y =$ ....
2) $9x + x =$ ....
3) $5x + 3x =$ ....
4) $7y + 8y =$ ....
5) $6b + 9b =$ ....
6) $8x + 6x =$ ....
7) $4h + 7h =$ ....
8) $7k + 6k =$ ....
9) $9x + 11x =$ ....
10) $3x + 12x =$ ....
11) $5y + 14y =$ ....
12) $9k + 15k =$ ....
13) $7b + 12b =$ ....
14) $6y + 17y =$ ....
15) $8x + 19x =$ ....
16) $9y + 21y =$ ....
17) $6h + 25h =$ ....
18) $5y + 19y =$ ....
19) $12x + 12x =$ ....
20) $15h + 14h =$ ....

B. Reste monomios. Recuerde que para resolver se restan los coeficientes numéricos y se copia la parte literal. Tiene un ejemplo.

0) $7x - 3x = \underline{4x}$
1) $9y - 2y =$ ....
2) $6x - 6x =$ ....
3) $8h - 3h =$ ....
4) $7x - 2x =$ ....
5) $9y - 5y =$ ....
6) $7x - 4x =$ ....
7) $5y - 2y =$ ....
8) $11h - 4h =$ ....
9) $15y - 6y =$ ....
10) $13k - 9k =$ ....
11) $16x - 7x =$ ....
12) $14y - 8y =$ ....
13) $18h - 7h =$ ....
14) $12x - 5x =$ ....
15) $17k - 9k =$ ....
16) $10y - 2y =$ ....
17) $19x - 7x =$ ....
18) $21y - 8y =$ ....
19) $25h - 9h =$ ....
20) $23x - 7x =$ ....

C. Complete la suma escribiendo el monomio correcto. Tiene un ejemplo.

0) $2x + \underline{6x} = 8x$
1) $4x +$ .... $= 7x$
2) $2x +$ .... $= 9x$
3) $6y +$ .... $= 13y$
4) $7b +$ .... $= 12b$
5) $8x +$ .... $= 15x$
6) $6y +$ .... $= 18y$
7) $9x +$ .... $= 12x$
8) $5h +$ .... $= 11h$
9) $6k +$ .... $= 14k$
10) $3y +$ .... $= 12y$
11) $9x +$ .... $= 15x$
12) $8k +$ .... $= 17k$
13) $6h +$ .... $= 16h$
14) $9x +$ .... $= 12x$
15) $7y +$ .... $= 15y$
16) $8b +$ .... $= 20b$
17) $9x +$ .... $= 22x$
18) $6y +$ .... $= 21y$
19) $10h +$ .... $= 23h$
20) $13k +$ .... $= 17k$

Razonamiento lógico

Lea detenidamente cada enunciado para saber si debe calcular el área total o solo el área lateral o el volumen y resuelva los problemas.

1) Se desea fabricar un cono abierto que tenga estas medidas: 10 cm de radio y 18 cm de generatriz. ¿Cuántos cm^2 de cartón se necesitan?

2) El techo de una casa tiene forma de cono. Sus medidas son: 2 metros de radio y 3 metros de generatriz. Calcule el área lateral de la superficie del techo de la casa.

3) En un puesto del mercado entregan las especies en conos de papel periódico. Las medidas del cono son 6 cm de radio y 10 de generatriz. ¿Cuánto papel se necesita para fabricar cada cono?

4) El techo de un tanque cilíndrico es un cono de 1 metro de radio y 1.5 metros de generatriz. ¿Cuál la superficie lateral del techo?

5) Los encargados de una fiesta de cumpleaños quieren fabricar 20 gorros de cartón con forma de cono. Las medidas de cada gorro son: 12 cm de radio y 20 cm de generatriz. ¿Cuánto cartón necesitan en total?

6) El área de la base de un cono mide 400 cm^2. Si la altura mide 50 cm, ¿cuál es el volumen del cono?

7) En una heladería, los conos tienen estas medidas: 4 cm de radio y 15 cm de altura. ¿Si la bola de helado se derrite, cuántos cm^3 de helado caben en cada cono?

8) Un filtro para agua tiene forma de cono invertido. Sus medidas son 40 cm de radio y 15 cm de altura. ¿Cuál es la capacidad del filtro?

9) Un trabajador acomodó un montón de arena y necesita saber el volumen que ocupa. Sabe que tiene forma de cono con un radio de 2 metros y una altura de 1 metro. ¿Cuál es el volumen de la arena?

10) ¿Cuántos cm^2 de lámina se necesita para fabricar un embudo de 5 cm de radio y 9 cm de generatriz?

11) Un herrero debe fabricar el techo de una chimenea con la forma de un cono. Las medidas deben ser: 30 cm de radio y 70 cm de generatriz. ¿Cuántos cm^2 de lámina necesita?

12) Una copa tiene la forma de un cono invertido. Sus medidas son: 5 cm de radio, 8 cm de altura y 9 cm de generatriz.

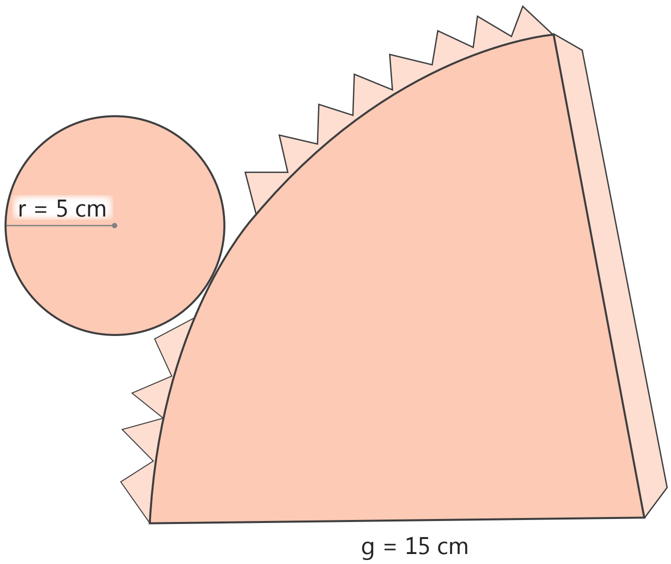
    a. ¿Cuál es la superficie lateral de la copa?

    b. ¿Cuál es la capacidad de la copa?

Desarrolle nuevas habilidades

Construya un cono de papel

- Tenga a la mano cartulina o papel grueso, regla, compás, tijeras, pegamento y lápiz.
- Observe el dibujo de abajo y trace sobre la cartulina una figura semejante con las medidas indicadas.
- Dibuje pestañas en los lados indicados en la figura.
- Recorte, doble y aplique pegamento en las pestañas.
- Arme el cono.



Revise su aprendizaje

Marque con un cheque ✓ la casilla que mejor indique su rendimiento.

Después de estudiar...	logrado	en proceso	no logrado
Conozco la forma de la nave Apolo.			
Calculo el área lateral, el área total y el volumen de un cono.			
Aplico las fórmulas de área y volumen del cono para resolver problemas.			
Resuelvo con agilidad sumas y restas algebraicas.			
Construyo un cono de papel.			