El teorema de Tales

¿Qué encontrará esta semana?

- Tales de Mileto y la pirámide de Keops
- El teorema de Tales
- Multiplicación y división de monomios
- Resolución de problemas aplicando el teorema de Tales

Competencias a trabajar del CNB

1. Produce patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones.

2. Construye modelos matemáticos que le permiten la representación y análisis de relaciones cuantitativas.

3. Construye modelos matemáticos que le permiten la representación y análisis de relaciones cuantitativas.

Indicadores de logro

1.2. Resuelve problemas que involucran cálculo de medidas y aplicación de propiedades de figuras planas y cuerpos sólidos.

2.1. Emite juicios en discusiones ofreciendo argumentos y justificando sus pasos y resultados.

2.3. Usa modelos matemáticos al representar y resolver problemas.

2.4. Utiliza diferentes métodos en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.

3.1. Utiliza eficientemente los diferentes tipos de operaciones en el conjunto de números reales, aplicando sus propiedades y verificando que sus resultados son correctos.

¡Para comenzar!

Tales de Mileto y la pirámide de Keops

Pirámide de Keops - Egipto

Tales de Mileto fue un matemático griego que vivió entre los siglos VI y V antes de Cristo. Cuenta la leyenda que durante uno de sus viajes a Egipto se encontró con el Rey de la ciudad.

El soberano, quien había escuchado de la habilidad del sabio griego para resolver problemas, le preguntó si era capaz de calcular de manera sencilla la altura de la gran pirámide de Keops que se levantaba imponente frente a ellos.

Tales reflexionó unos instantes y contestó que sí, tomó una vara y la sembró totalmente vertical en la arena. Luego, esperó a que la sombra proyectada en el suelo tuviera la misma longitud de la vara.

En ese instante se dirigió al Rey: *Con mucha certeza me atrevo a decir, que en este momento, si se mide la sombra de la pirámide, se encontrará la altura que esta tiene*.

Esta narración nos muestra que el ingenio nos ayuda a solucionar problemas en apariencia difíciles de una forma muy sencilla.

¡A trabajar!

Después de leer el texto con atención, responda a las preguntas.

1) ¿Con qué problema retó el Rey a Tales de Mileto?

....

2) ¿Qué materiales utilizó Tales para medir la altura de la pirámide?

....

3) ¿Qué dificultades pudo enfrentar si hubiera medido la pirámide de forma directa?

....

El mundo de la matemática

1. El teorema de Tales

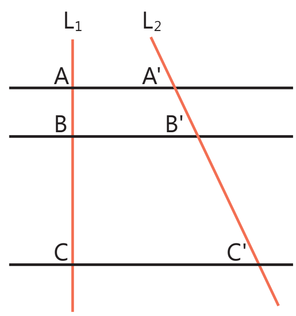
Proporcionalidad de segmentos

Esta semana estudiaremos la relación que hay entre los segmentos de líneas rectas cortadas entre sí. Este conocimiento sirve para calcular longitudes grandes y desconocidas, difíciles de medir de forma directa, a partir de longitudes pequeñas y conocidas.

Tales de Mileto fue el primero en reflexionar sobre este tema estableciendo el teorema denominado ***Primer teorema de Tales***, que dice:

Si varias rectas paralelas son intersecadas por otras dos rectas, las medidas de los segmentos comprendidos entre las paralelas son proporcionales entre sí.

Veamos el teorema de manera gráfica



Si las tres rectas paralelas de la imagen son cortadas por las rectas L_1 y L_2, entonces las medidas de los segmentos en la recta L_1 **son proporcionales** a las medidas de los segmentos de la recta L_2.

Los segmentos de la recta L_1 son: AB, AC, BC. De igual manera, los de la recta L_2 son: A'B', A'C', B'C'.

Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Tales, se cumple esta proporción:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

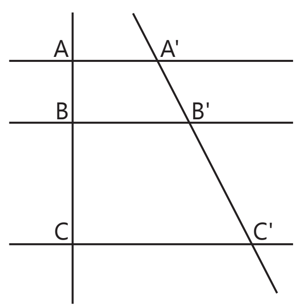
Se lee: *el segmento AB es proporcional al segmento A'B'; lo mismo que el segmento BC es proporcional al segmento B'C'.*

Ejercicio 1

A. Compruebe el teorema de Tales. Mida con su regla el valor de cada segmento de la figura. Escriba la respuesta en milímetros. Le ayudamos con los segmentos AB y A'B'.

Segmento AB: *8 mm* Segmento BC: ....

Segmento A'B': *9 mm* Segmento B'C': ....



B. Compare las medidas de los segmentos AB y BC, así como las de los segmentos A'B' y B'C'. Luego responda: ¿Qué relación de proporcionalidad tienen?

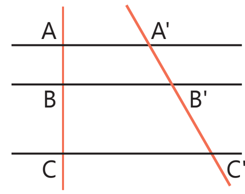
....

....

2. Aplicaciones del Teorema de Tales

Como vimos en el apartado anterior, el teorema de Tales permite calcular longitudes desconocidas cuando se conocen las medidas de los otros segmentos.

Veamos un ejemplo



Calculemos el segmento B'C' de la figura, si AB = 4 cm, BC = 10 cm y A'B' = 6 cm.

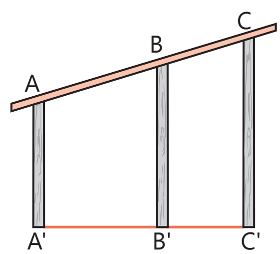
Recuerde que la propiedad de extremos y medios la estudiamos en la semana 29 del grupo Quiriguá.

- Planteamos la proporción, aplicando el teorema de Tales. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$
- Sustituimos los datos. $\frac{4\ cm}{6\ cm} = \frac{10\ cm}{B'C'}$
- Aplicamos la propiedad de extremos y medios. $(4\ cm)(B'C') = (10\ cm)(6\ cm)$
- Despejamos la incógnita y hallamos su valor. $B'C' = \frac{60(cm)(\cancel{cm})}{4\ \cancel{cm}}$

$\mathbf{B'C' = 15}\ \boldsymbol{cm}$

El segmento B'C' mide 15 cm.

Otro ejemplo



La estructura de una galera tiene la forma que se muestra en la figura. Calculemos la distancia B'C' que separa la columna central de la columna derecha, si las medidas de los otros segmentos son:
AB = 10 m, BC = 9 m y A'B' = 8 m.

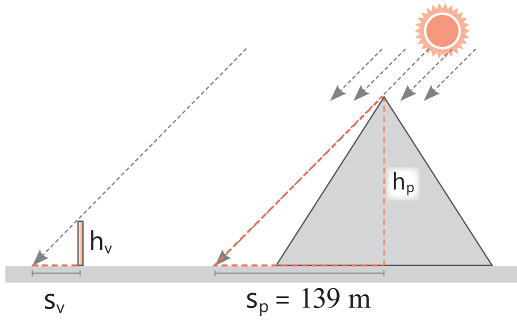
- Planteamos la proporción, aplicando el teorema de Tales. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$
- Sustituimos los datos. $\frac{10\ m}{8\ m} = \frac{9\ m}{B'C'}$
- Aplicamos la propiedad de extremos y medios. $(10\ m)(B'C') = (8\ m)(9\ m)$
- Despejamos la incógnita y hallamos su valor. $B'C' = \frac{72(m)(\cancel{m})}{10\ \cancel{m}}$

$\mathbf{B'C' = 7.2\ m}$

La distancia B'C' es de 7.2 metros.

El ejemplo siguiente muestra el procedimiento que utilizó Tales de Mileto para calcular la altura de la pirámide de Keops. Observe la figura.

El segmento h_v representa la altura de la vara que es paralelo al segmento h_p que representa la altura de la pirámide. Cada uno proyecta una sombra proporcional a su altura. La sombra de la vara es S_v y la de la pirámide, S_p.



La vara puede tener cualquier medida, en este caso suponemos que mide 2 metros, al igual que su sombra. La sombra de la pirámide mide 139 metros. Con estos datos resolvemos el problema.

- Planteamos la proporción, aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{h_p}{h_v} = \frac{S_p}{S_v}$$

- Sustituimos los datos.

$$\frac{h_p}{2\ m} = \frac{139\ m}{2\ m}$$

- Aplicamos la propiedad de extremos y medios.

$$(2\ m)(h_p) = (139\ m)(2\ m)$$

- Despejamos la incógnita y hallamos su valor.

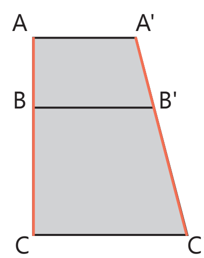
$$h_p = \frac{278(m)(\cancel{m})}{2\ \cancel{m}}$$

$$\mathbf{h_p = 139}\ \boldsymbol{m}$$

La pirámide de Keops mide 139 metros de altura.

Ejercicio 2

Aplique el procedimiento que aprendió para resolver los problemas.



1) Calcule la longitud del tramo AB del terreno de la imagen, si las medidas de los segmentos son: BC = 18 m, A'B' = 10 m, B'C' = 20 m.

- Plantee una proporción, aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

- Sustituya los datos.

$$\frac{AB}{10\ m} = \text{..........}$$

- Aplique la propiedad de extremos y medios.

$$(\text{..........})(\text{..........}) = (\text{..........})(\text{..........})$$

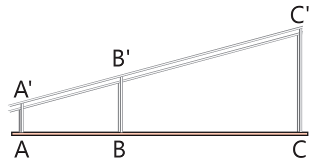
- Despeje la incógnita y opere.

$$AB = \frac{180(m)(m)}{}$$

$$AB = \text{..........}$$

El tramo AB mide .... **metros de longitud**.

2) Calcule la longitud del tramo AB de la estructura de la imagen, si las medidas de cada tramo son A'B' = 3 m, B'C' = 6 m, BC = 4 m.



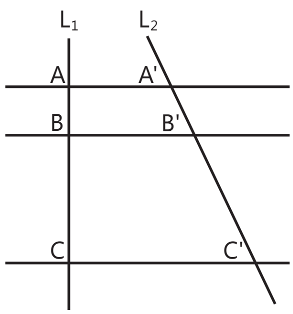
- Plantee una proporción aplicando el teorema de Tales. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$
- Sustituya los datos. .... = ...
- Aplique la propiedad de extremos y medios. (........)(........) = (........)(........)
- Despeje la incógnita y opere. AB = ... = ...

La longitud del tramo es de .... **metros**.

Resumen

1. El teorema de Tales

El teorema de Tales establece que si varias rectas paralelas son intersecadas por otras dos rectas, las medidas de los segmentos comprendidos entre las paralelas son proporcionales entre sí.



De acuerdo al teorema y los segmentos de las rectas de la imagen se cumple esta proporción:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Se lee: *el segmento AB es proporcional al segmento A'B', lo mismo que BC es proporcional a B'C'*.

2. Para calcular un segmento desconocido cuando se conocen los otros segmentos, seguimos estos pasos:

- Planteamos una proporción aplicando el teorema de Tales.
- Sustituimos los datos.
- Aplicamos la propiedad de extremos y medios.
- Despejamos la incógnita y hallamos su valor.

Autocontrol

Actividad 1. Demuestre lo aprendido

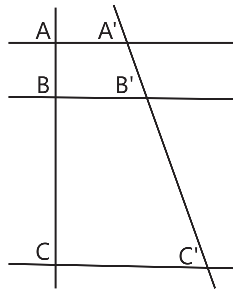
A. Relacione segmentos. Observe con atención la figura y escriba el segmento que falta en cada proporción. Fíjese en el ejemplo.

0) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$

1) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{\_\_\_\_}$

2) $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{\_\_\_\_}{AB}$

3) $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A'C'}{\_\_\_\_}$

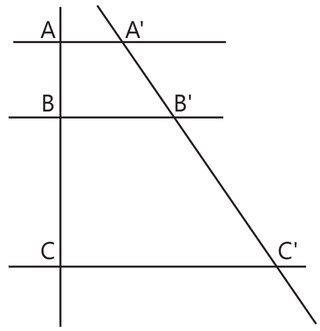


B. Realice las actividades y compruebe el teorema de Tales. Necesita una regla para realizar la primera actividad.

1) Mida con su regla la longitud de cada segmento de la figura. Escriba su respuesta en milímetros. Tiene un ejemplo.

segmento AB = *10 mm* segmento BC = ...

segmento A'B' = ... segmento B'C' = ...



2) Calcule el valor de $\dfrac{AB}{A'B'}$ Exprese su respuesta en fracción y simplifique hasta su mínima expresión.

3) Calcule el valor de $\dfrac{BC}{B'C'}$ Exprese su respuesta en fracción y simplifique hasta su mínima expresión.

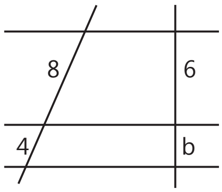
4) Responda la pregunta: ¿Se cumple la igualdad $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$? Explique.

5) Compruebe que también se cumple la igualdad $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

Actividad 2. Practique lo aprendido

Aplique el procedimiento que aprendió en la semana para calcular el segmento desconocido en cada figura. Guíese por el ejemplo.

0)

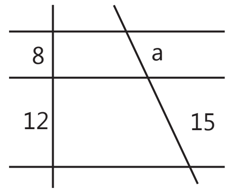


$$\frac{8}{6} = \frac{4}{b} \qquad (8)(b) = (6)(4)$$

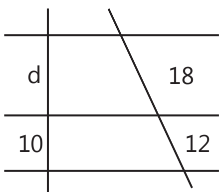
$$b = \frac{24}{8}$$

$$\boldsymbol{b = 3}$$

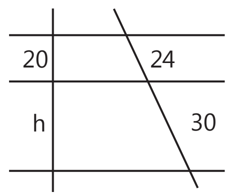
1)



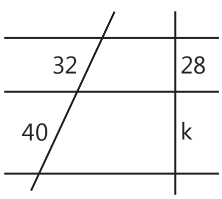
2)



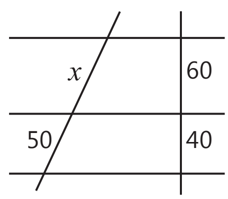
3)



4)

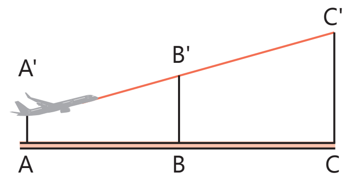


5)

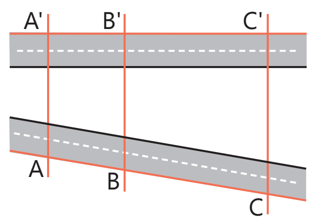


B. Aplique el procedimiento que aprendió en la semana para resolver los problemas.

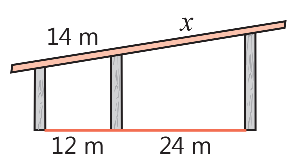
1) Un avión asciende en línea recta como se muestra en la imagen. La medida de los segmentos son: AB = 5 km, AC = 10 km y A'B' = 6 km. ¿Cuántos kilómetros se desplaza el avión desde A' hasta C'?



2) Dos carreteras están separadas como se muestra en la imagen. Calcule la longitud del tramo B'C', si AB = 10 km, BC = 15 km, y A'B' = 9 km.



3) Se desea conocer la longitud del segmento x del puente de la figura. Calcúlelo con las medidas indicadas.



Agilidad de cálculo mental

Multiplique y divida los monomios lo más rápido que pueda. Intente hacerlo en menos de 3 minutos. ¡Adelante!

A. Multiplicación. Recuerde que primero se multiplican los coeficientes numéricos. Luego, se copia la base y se suman los exponentes.

0) $(5a^5)(3a^7) =$ $15a^{12}$
1) $(5z^3)(7z^2) =$ ....
2) $(9x^8)(2x^3) =$ ....
3) $(8g^2)(4g^4) =$ ....
4) $(4y^5)(9y^5) =$ ....
5) $(3p^9)(2p^4) =$ ....
6) $(6d^8)(7d^4) =$ ....
7) $(8h^6)(9h^5) =$ ....
8) $(6m^6)(4m^8) =$ ....
9) $(8v^8)(2v^{10}) =$ ....
10) $(8t)(t) =$ ....
11) $(y^6)(y^9) =$ ....
12) $(3x^3)(5x^2) =$ ....
13) $(4c^7)(4c^3) =$ ....
14) $(6k^5)(9k^8) =$ ....
15) $(7b^7)(4b^5) =$ ....
16) $(2q^7)(9q^4) =$ ....
17) $(9x^5)(5x^4) =$ ....
18) $(6w^8)(5w^3) =$ ....
19) $(4c^4)(2c^4) =$ ....
20) $(3t^5)(3t^5) =$ ....
21) $(9x^9)(7x^3) =$ ....
22) $(5h^2)(8h^3) =$ ....
23) $(7w^2)(6w^2) =$ ....
24) $(20p^5)(4p^3) =$ ....
25) $(25a^{16})(4a^4) =$ ....
26) $(12k^{12})(5k^6) =$ ....
27) $(60g^{10})(3g^6) =$ ....
28) $(15m^4)(2m^7) =$ ....
29) $(16h^6)(4h^9) =$ ....

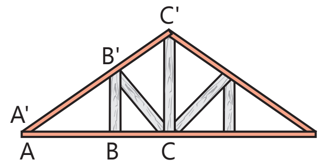
B. Divida los monomios. Recuerde que primero se dividen los coeficientes numéricos. Luego, se copia la base y se restan los exponentes.

0) $15y^5 \div 3y^5 =$ 5
1) $6d^6 \div d^3 =$ ....
2) $25t^9 \div 5t^2 =$ ....
3) $32x^7 \div 8x^5 =$ ....
4) $24z^9 \div 6z^3 =$ ....
5) $81r^8 \div 9r^4 =$ ....
6) $36b^5 \div 6b^4 =$ ....
7) $10h^5 \div 2h^3 =$ ....
8) $18k^9 \div 6k^6 =$ ....
9) $64m^{10} \div 8m^8 =$ ....
10) $32x^7 \div 4x =$ ....
11) $40k^2 \div 2k^2 =$ ....
12) $63g^5 \div 7g^3 =$ ....
13) $75t^{10} \div 3t^6 =$ ....
14) $45b^5 \div 9b^4 =$ ....
15) $24c^{18} \div 2c^3 =$ ....
16) $60y^{14} \div 3y^6 =$ ....
17) $45x^{17} \div 5x^5 =$ ....
18) $81g^{12} \div 9g^4 =$ ....
19) $60a^{19} \div 10a^5 =$ ....
20) $36d^{16} \div 9d^{12} =$ ....
21) $24j^{12} \div 12j^{10} =$ ....
22) $80d^{16} \div 40d^7 =$ ....
23) $25p^{14} \div 25p^6 =$ ....
24) $120d^{22} \div 6d^2 =$ ....
25) $66d^{24} \div 22d^{12} =$ ....
26) $180q^{24} \div 3q^{10} =$ ....
27) $100d^{15} \div 4d^{10} =$ ....
28) $150n^{26} \div 5n^{16} =$ ....
29) $125m^{24} \div 25m^{18} =$ ....

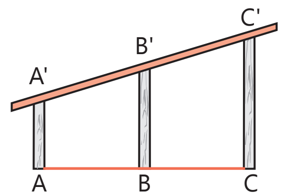
Razonamiento lógico

Aplique el teorema de Tales y el procedimiento que aprendió en la semana para resolver los problemas.

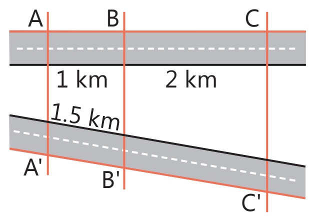
1) Calcule la distancia BC que hay entre las columnas de la imagen. Las medidas son: AB = 6 m, A'B' = 8 m y B'C' = 4 m.



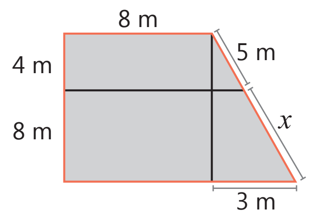
2) Calcule la distancia que hay entre la primera y la segunda columna de la estructura que se muestra en la imagen. Las medidas de los segmentos son: A'B' = 12 m, B'C' = 10 m, BC = 8 m.



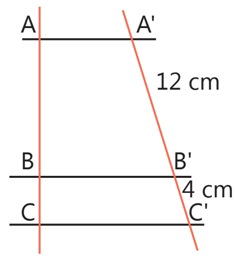
3) Dos carreteras están separadas como se muestra en la imagen. Si el segmento AC mide 3 km, ¿cuánto mide el segmento A'C'? Tome en cuenta las medidas indicadas.



4) Encuentre el perímetro de un terreno con la forma que se muestra en la ilustración. Recuerde que el perímetro es la medida del borde de una figura.



5) **¡Le presentamos un reto!** Calcule el valor de los segmentos AB = $8x + 1$ y BC = $5x - 2$. Aplique una ecuación fraccionaria para hallar el valor de x. Estas ecuaciones las estudió en la semana 12 Utatlán. Le ayudamos en los primeros pasos del procedimiento.



- Plantee la proporción y resuelva la ecuación para hallar el valor de x.

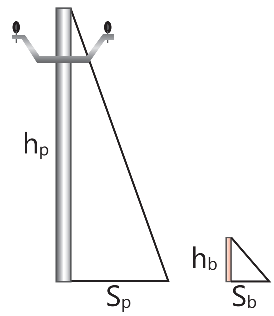
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}; \quad \frac{8x+1}{12} = \frac{5x-2}{4}$$

- Sustituya x por su valor en cada segmento.

AB = $8x + 1$	BC = $5x - 2$
AB = 8(........) + 1	BC = 5(........) – 2
AB = ...	BC = ...
AB = ...	**BC =** ....

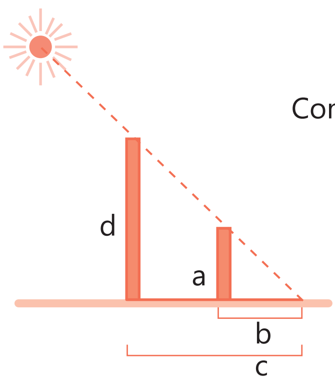
Desarrolle nuevas habilidades

Calcule la altura de un poste. Con esta actividad aprenderá a calcular alturas de la misma forma que lo hizo Tales de Mileto. Siga los pasos.



- Elija un poste o una estructura alta de su comunidad para calcular su altura.
- Consiga un palo o bastón de aproximadamente 1 metro de longitud y una cinta métrica.
- Elija una hora del día cuando el poste proyecte una sombra fácil de medir. Por ejemplo, las 10 de la mañana.
- Siembre el bastón a un lado del poste de modo que proyecte su sombra sobre el suelo. Observe la imagen.
- Mida la sombra y altura del bastón. Luego, la sombra del poste. Anote los datos en su cuaderno.
- Dibuje un esquema que represente el problema. Guíese de la imagen de esta página.
- Plantee una proporción con los datos que registró y determine la altura del poste.

Comparta su trabajo con sus compañeros y comenten sobre los resultados.



Revise su aprendizaje

Marque con un cheque ✓ la casilla que mejor indique su rendimiento.		logrado	en proceso	no logrado
Después de estudiar...	Valoro los aportes de Tales de Mileto a la geometría.			
	Aplico el teorema de Tales para calcular el segmento proporcional desconocido de una figura.			
	Aplico el teorema de Tales para resolver problemas de la vida cotidiana.			
	Multiplico y divido monomios con agilidad.			
	Desarrollo la habilidad de calcular alturas aplicando el teorema de Tales.			