



Razones trigonométricas

¿Qué encontrará esta semana?



Ángulos de elevación y ángulos de depresión



Razones trigonométricas

$$\begin{array}{l} 8 \times 6 = 48 \\ 9 \times 7 = 63 \end{array}$$

Problemas que se resuelven aplicando razones trigonométricas



Potencias y raíces de monomios



Competencias a trabajar del CNB

1. Produce patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones.
2. Construye modelos matemáticos que le permiten la representación y análisis de relaciones cuantitativas.
3. Construye modelos matemáticos que le permiten la representación y análisis de relaciones cuantitativas.



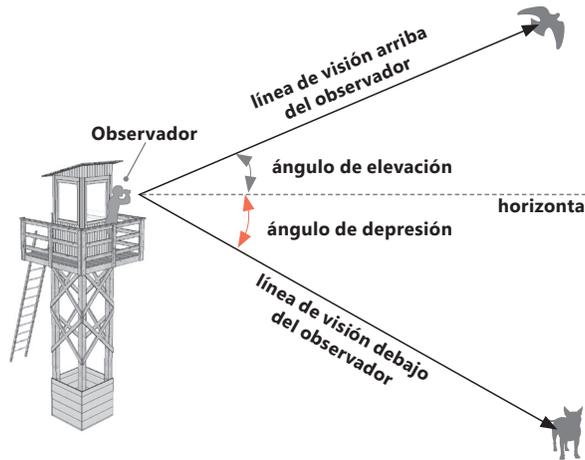
Indicadores de logro

- 1.2. Resuelve problemas que involucran cálculo de medidas y aplicación de propiedades de figuras planas y cuerpos sólidos.
- 1.3. Aplica la trigonometría a la resolución de problemas.
- 2.1. Emite juicios en discusiones ofreciendo argumentos y justificando sus pasos y resultados.
- 2.3. Usa modelos matemáticos al representar y resolver problemas.
- 2.4. Utiliza diferentes métodos en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- 3.1. Utiliza eficientemente los diferentes tipos de operaciones en el conjunto de números reales, aplicando sus propiedades y verificando que sus resultados son correctos.



¡Para comenzar!

Ángulos de elevación y ángulos de depresión



La trigonometría de triángulos rectángulos se utiliza frecuentemente para averiguar la altura de un objeto de manera indirecta. Para resolver un problema de este tipo, se mide el ángulo desde la horizontal hasta la recta de visión, cuando se ve la parte superior o inferior del objeto.

Se llama línea de visión a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.

Llamamos **ángulo de elevación** al ángulo formado entre la horizontal del observador y el lugar observado, cuando este está situado arriba del observador.

Cuando el observador está más alto que el objeto observado, lo llamaremos **ángulo de depresión**.

Identifique ambos ángulos en la figura.

¡A trabajar!

Escriba dos ejemplos en los que aplique el ángulo de elevación y otros dos ejemplos en los que aplique el ángulo de depresión. Tiene un ejemplo para cada caso.

0) *Observar un avión en pleno vuelo*

0) *Observar un pueblo desde un mirador*

1)

1)

2)

2)



El mundo de la matemática

1. Razones trigonométricas

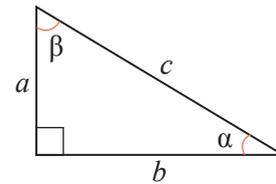
Seno, coseno, tangente

La semana anterior empleamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados desconocidos de un triángulo rectángulo. Este teorema nos ayuda a resolver muchos problemas de trigonometría, pero tiene una limitante: necesitamos conocer las medidas de dos lados del triángulo para calcular la medida del tercero.

Pero, ¿qué ocurre cuando conocemos solo la medida de un lado y un ángulo del triángulo? En este caso, es necesario aplicar las **razones trigonométricas**.

Llamamos razones trigonométricas a una serie de relaciones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo. Para comprender mejor estas relaciones, debemos tener claros los conceptos de cateto **adyacente** y cateto **opuesto**. Fíjese.

- Cateto **adyacente**: es el lado que está **a la par** de un ángulo determinado. Por ejemplo, en el triángulo de la derecha, el lado a es adyacente al ángulo β (beta) y el lado b es adyacente al ángulo α (alfa).
- Cateto **opuesto**: es el lado que está **frente** al ángulo. Por ejemplo, el cateto opuesto al ángulo α es a y el lado opuesto al ángulo β es b . La hipotenusa es el lado c y es opuesta al ángulo recto.



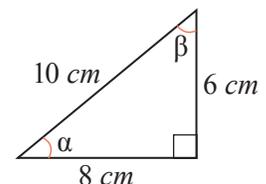
Las relaciones o razones trigonométricas básicas son: **seno**, **coseno** y **tangente**. Las estudiaremos en las páginas siguientes.

¡Un paso más! A partir de esta semana identificaremos los ángulos con las letras griegas: α (alfa) y β (beta).

➔ Ejercicio 1

Observe las medidas del triángulo rectángulo y complete cada enunciado con el valor correcto. Tiene un ejemplo.

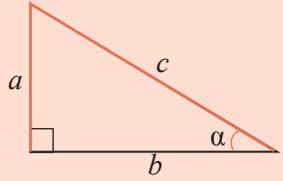
- 0) El cateto **opuesto** al ángulo α mide... 6 cm
- 1) El cateto **opuesto** al ángulo β mide... ..
- 2) El cateto **adyacente** al ángulo α mide... ..
- 3) El cateto **adyacente** al ángulo β mide... ..
- 4) El cateto **opuesto** al ángulo de 90° mide... ..



1.1 Razones trigonométricas básicas

a. Seno de un ángulo ($\text{sen } \alpha$)

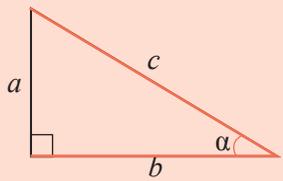
El seno de un ángulo establece la relación entre el ángulo conocido, el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Se calcula con la fórmula:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$


Se lee: *El seno del ángulo alfa es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa.*

b. Coseno de un ángulo ($\text{cos } \alpha$)

El coseno de un ángulo de un triángulo rectángulo se define como la relación entre el ángulo conocido, el cateto adyacente y la hipotenusa.

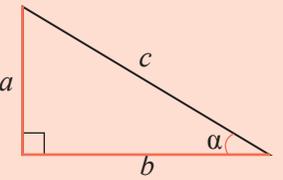
$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$


Se lee: *el coseno de alfa es igual al cateto adyacente entre la hipotenusa.*

c. Tangente de un ángulo ($\text{tan } \alpha$)

La tangente de un ángulo se puede definir como la relación entre dicho ángulo y los dos catetos de un triángulo rectángulo.

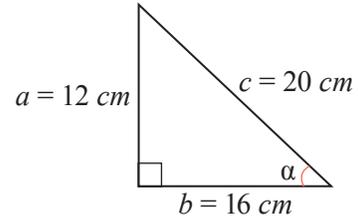
En general decimos que la tangente de un ángulo es igual al cateto opuesto dividido entre el cateto adyacente.

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad \text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$


Se lee: *la tangente del ángulo alfa es igual al cateto opuesto entre el cateto adyacente.*

Practicemos con unos ejemplos la ubicación y el valor de seno, coseno y tangente de un ángulo.

Observemos las medidas del triángulo rectángulo de la figura y determinemos el valor del seno de alfa (**sen α**).



- Identificamos los lados

cateto opuesto $a = 12 \text{ cm}$

hipotenusa $c = 20 \text{ cm}$

- Escribimos la fórmula del seno

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

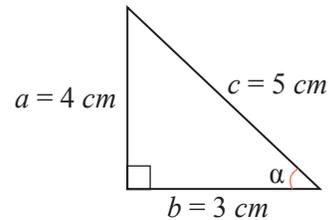
- Sustituimos los valores

$$\text{sen } \alpha = \frac{12 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}$$

$$\text{sen } \alpha = 0.6$$

Veamos un ejemplo del cálculo del coseno

Determinemos el valor del coseno de alfa (**cos α**), para el triángulo rectángulo con las medidas indicadas.



- Identificamos los lados

cateto adyacente $b = 3 \text{ cm}$

hipotenusa $c = 5 \text{ cm}$

- Escribimos la fórmula del coseno

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

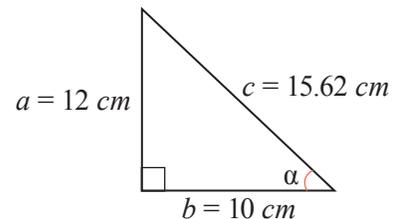
- Sustituimos los valores

$$\text{cos } \alpha = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$$

$$\text{cos } \alpha = 0.6$$

Veamos un ejemplo del cálculo de la tangente

Observemos las medidas del triángulo rectángulo y determinemos el valor de la tangente de alfa (**tan α**).



- Identificamos los lados

opuesto $a = 12 \text{ cm}$

adyacente $b = 10 \text{ cm}$

- Escribimos la fórmula de la tangente

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

- Sustituimos los valores

$$\text{tan } \alpha = \frac{12 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$

$$\text{tan } \alpha = 1.2$$

2. Cálculo de razones trigonométricas

Calculadora o tabla



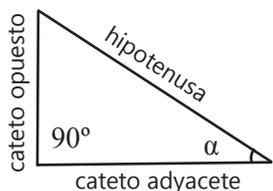
En la calculadora encontrará la tecla "sin" en lugar de la abreviatura *sen*.

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora, contábamos con la medida de los lados para calcular las distintas razones trigonométricas. ¿Pero cómo calcularíamos esas razones si solo tenemos la medida del ángulo y de un lado?

Si contamos con una calculadora científica buscamos la función que nos piden, por ejemplo el seno, pulsamos la tecla "sin", introducimos el valor del ángulo, como aparece en la ilustración, y automáticamente nos dará la respuesta.

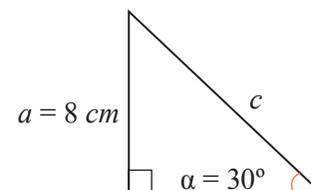


Pero si no tenemos una calculadora científica podemos trabajar con una tabla de razones trigonométricas que recoge los valores de seno, coseno y tangente para los ángulos de 0° a 90°. Encontrará esta tabla en la última hoja de la semana. Recórtela y cúbrala con plástico para protegerla.



Hagamos un ejemplo

Calculemos la medida de la hipotenusa de un triángulo que tiene un ángulo de 30° y uno de sus lados mide 8 cm. Observe la figura y siga los pasos.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotesnusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotesnusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

- Identificamos los catetos. El cateto opuesto es el que se encuentra frente al ángulo α .
- Determinamos qué relación trigonométrica vamos a utilizar. En nuestro ejemplo, será la que relacione el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- Sustituimos valores.

En la tabla usted verá, a la par de la medida del ángulo, los valores de las razones trigonométrica que estamos estudiando.

ángulo	sen	cos	tan
30°	0.500	0.866	0.577

- Buscamos en la tabla el dato que corresponde al del seno de 30° y lo sustituimos por su valor.
- Despejamos la variable c

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{8 \text{ cm}}{c}$$

$$0.5 = \frac{8 \text{ cm}}{c}$$

$$c \cdot 0.5 = 8 \text{ cm}$$

$$c = \frac{8 \text{ cm}}{0.5}$$

$$c = 16 \text{ cm}$$

La hipotenusa mide 16 centímetros.

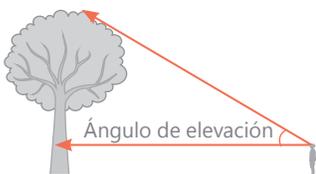
3. Aplicación de las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas se emplean con frecuencia en problemas de construcción, ingeniería y diseño. Por ejemplo, es necesario saber a qué altura debe elevarse una grúa o cuánto debe alzarse un puente.

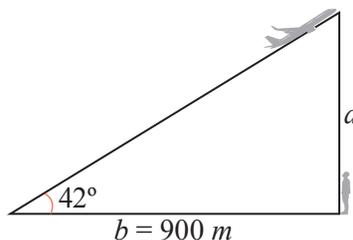
Veamos algunos problemas de aplicación.

Un avión despegue con un ángulo de elevación de 42° . ¿A qué altura va pasar el avión un observador que se encuentra a 900 metros del punto de despegue?

La ilustración nos puede ayudar a visualizar los datos del problema.



Cuando un observador dirige su vista a un punto hacia arriba, entonces el ángulo que forma la línea visual con el horizonte se llama Ángulo de Elevación



- Identificamos los catetos.

La altura que alcanza el avión representa el cateto opuesto y la distancia horizontal el cateto adyacente.

Cateto opuesto $a = ?$
 Cateto adyacente $b = 900 \text{ m}$

- La relación trigonométrica que debemos utilizar será la que relacione el cateto opuesto y el adyacente. Escribimos la fórmula

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

- Sustituimos valores

$$\tan 42^\circ = \frac{a}{900 \text{ m}}$$

- Buscamos en la tabla de valores el valor de la tangente de 42° .

Ángulo	sen	cos	tan
42°	0.669	0.743	0.900

- Sustituimos el valor de la tangente.

$$0.9 = \frac{a}{900 \text{ m}}$$

- Despejamos la variable.

$$(0.9)(900 \text{ m}) = a$$

$$a = 810 \text{ m}$$

El avión se encuentra a 810 m de altura.

Ejercicio 3

Una persona está situada a una altura de 687 m sobre el nivel del mar. Desde este punto observa un barco, con un ángulo de depresión de 23° . ¿A qué distancia de la orilla se encuentra el barco?

- Identifique los lados
 cateto opuesto: $b = 687 \text{ m}$
 cateto adyacente:

- Determinamos la relación trigonométrica adecuada para resolver el problema. En este caso debemos emplear la que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente.

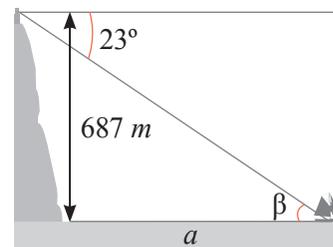
- Sustituimos valores:

Ubicamos en la tabla el valor de la tangente de 23° .

ángulo	sen	cos	tan
23°	0.391	0.921	0.425

- Despejamos la incógnita a .

Respuesta: **El barco se encuentra a metros de la orilla.**



$$\tan \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\tan 23^\circ = \frac{\quad}{a}$$

$$\dots = \frac{687 \text{ m}}{a}$$

$$a = \frac{\quad}{0.425}$$

$$a = 1620.28 \text{ m}$$



Resumen

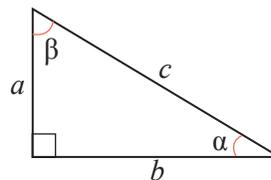
La **trigonometría** es una rama de la matemática que se dedica al estudio de las razones trigonométricas.

Las **razones trigonométricas** son relaciones entre los lados del triángulo rectángulo y dependen de los ángulos del mismo. Las tres razones trigonométricas básicas son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan).

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$





Autocontrol

➔ Actividad 1. Demuestre lo aprendido

Rellene el círculo de la opción que completa correctamente cada oración.

- 1) La razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto y la hipotenusa es...
 - seno
 - coseno
 - tangente

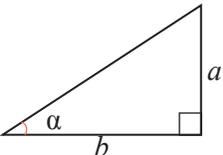
- 2) La razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto y el cateto adyacente es...
 - seno
 - coseno
 - tangente

- 3) La razón trigonométrica que relaciona el cateto adyacente y hipotenusa es...
 - seno
 - coseno
 - tangente

- 4) El cateto opuesto está ubicado...
 - al lado del ángulo
 - enfrente del ángulo
 - fuera del triángulo

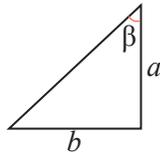
B. Clasifique los lados a y b como cateto adyacente u opuesto de acuerdo al ángulo dado. Tiene un ejemplo.

0)



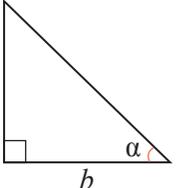
$a =$ cateto opuesto
 $b =$ cateto adyacente

3)



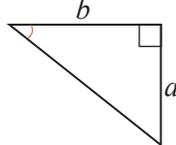
$a =$
 $b =$

1)



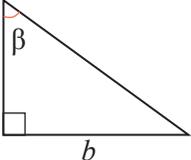
$a =$
 $b =$

4)



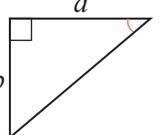
$a =$
 $b =$

2)



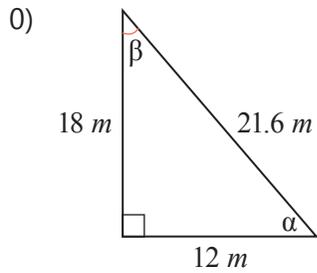
$a =$
 $b =$

5)



$a =$
 $b =$

C. Observe las medidas del triángulo y encuentre el valor de las razones trigonométricas indicadas. Tiene un ejemplo.



$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

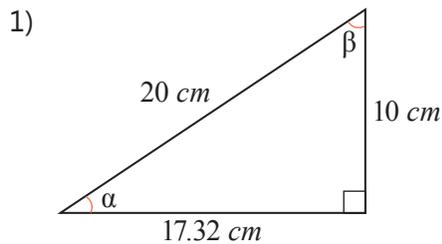
$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{18 \text{ m}}{12 \text{ m}}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{12 \text{ m}}{21.6 \text{ m}}$$

$$\tan \alpha = 1.5$$

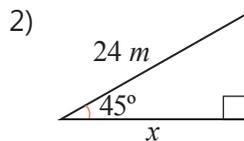
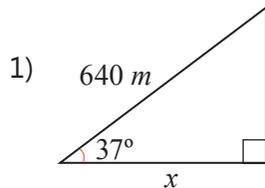
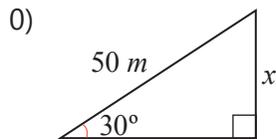
$$\text{sen } \beta = 0.55$$



$$\text{sen } \alpha = \dots\dots\dots$$

$$\text{cos } \beta = \dots\dots\dots$$

D. Utilizando las relaciones trigonométricas calcule el lado x en cada uno de los triángulos siguientes. Tiene un ejemplo.





Agilidad de cálculo mental

Resuelva mentalmente el valor de la variable que hace verdadera la ecuación, escriba la respuesta sobre la línea. Hágalo lo más rápido que pueda. Tiene un ejemplo para cada caso.

A. Suma

0) $8 + w = 16$ $w = \underline{8}$

7) $18 + w = 36$ $w = \underline{\hspace{2cm}}$

1) $3 + x = 10$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

8) $x + 20 = 40$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $5 + y = 25$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

9) $y + 25 = 33$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $7 + z = 17$ $z = \underline{\hspace{2cm}}$

10) $z + 16 = 20$ $z = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $10 + a = 25$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$

11) $a + 12 = 15$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$

5) $14 + b = 15$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

12) $b + 45 = 50$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

6) $22 + c = 30$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

13) $c + 26 = 36$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

B. Resta

0) $6 - x = 4$ $x = \underline{2}$

7) $45 - x = 40$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

1) $8 - y = 0$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

8) $y - 10 = 18$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $2 - z = 1$ $z = \underline{\hspace{2cm}}$

9) $z - 12 = 12$ $z = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $14 - a = 10$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$

10) $a - 15 = 7$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $18 - b = 12$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

11) $b - 20 = 9$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

5) $36 - c = 22$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

12) $c - 45 = 15$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

6) $84 - w = 70$ $w = \underline{\hspace{2cm}}$

13) $w - 16 = 16$ $w = \underline{\hspace{2cm}}$

B. Multiplicación y división

0) $3a = 12$ $a = \underline{4}$

6) $\frac{y}{8} = 5$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

1) $12b = 24$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

7) $\frac{z}{3} = 6$ $z = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $15c = 90$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

8) $\frac{a}{2} = 4$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $10w = 40$ $w = \underline{\hspace{2cm}}$

9) $\frac{b}{4} = 9$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $12x = 36$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

10) $\frac{c}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ $5 = \underline{\hspace{2cm}}$

5) $40c = 120$ $c = \underline{\hspace{2cm}}$

11) $\frac{w}{10} = 10$ $w = \underline{\hspace{2cm}}$

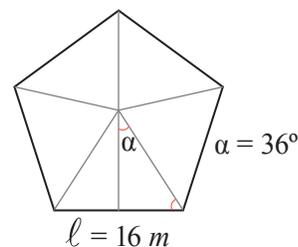


Razonamiento lógico

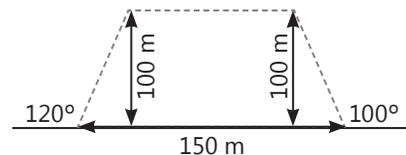
Utilice las razones trigonométricas para resolver los ejercicios siguientes. Tome dos decimales y aproxime donde sea posible.

- 1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y tiene un ángulo de 30° . ¿Cuánto miden los dos catetos?
- 2) Un cable de soporte debe ser colocado en la parte superior de un poste de 8 m de alto y fijado en el suelo. ¿Qué cantidad de alambre se necesita para que forme un ángulo de 75° con el suelo?
- 3) El hilo de un barrilete mide 50 m de largo y forma un ángulo de 47° con la horizontal. ¿A qué altura se encuentra el barrilete?
- 4) Cuando los rayos del sol forman un ángulo de 35° con la horizontal, la sombra de un árbol mide 10 m. ¿Cuál es la altura del árbol?
- 5) Una persona asomada en lo alto de un edificio tiene un nivel visual de 1.50 m de altura. Al ver un automóvil estacionado, el ángulo de depresión es de 48° . Si la base del edificio se encuentra a 70 m del automóvil, ¿cuál es la altura del edificio?

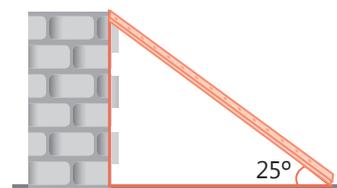
- 6) Con las medidas indicadas en la figura, calcule el área del pentágono regular. Recuerde que la fórmula del área. $A = \frac{P \times a}{2}$



- 7) Una carretera debe rodear un valle para abaratar los costes de construcción. Con las medidas indicadas en la ilustración, ¿cuál es la medida de la carretera al dar esa vuelta? Sugerencia: utilice sus conocimientos sobre ángulos suplementarios.



- 8) La parte superior de una escalera de 7 metros de largo está apoyada contra una pared. Si la base de la escalera forma un ángulo de 25° con el suelo. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

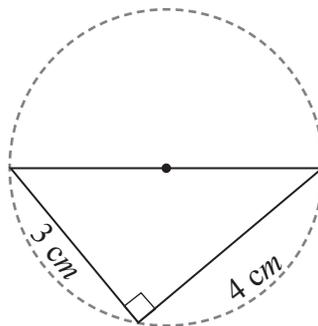


Desarrolle nuevas habilidades

¿Puede encontrar el área de un círculo a partir de un triángulo?

En diferentes pruebas de razonamiento nos presentan una figura compuesta, para que, a partir de los datos de una figura conocida, podamos encontrar la medida de otra.

En esta sección averiguaremos el área de un círculo a partir de las medidas de un triángulo rectángulo. Preste atención a la figura compuesta y siga los pasos.



- Encuentre el valor de la hipotenusa del triángulo, que es el diámetro de la circunferencia.
- Divida el valor del diámetro entre 2, para obtener el radio.
- Escriba la fórmula del área de un círculo, sustituya los datos.



Revise su aprendizaje

Marque con un cheque ✓ la casilla que mejor indique su rendimiento.

Después de estudiar...

Distingo entre ángulo de elevación y ángulo de depresión.

Calculo el lado desconocido de triángulos rectángulos.

Aplico las razones trigonométricas en la solución de problemas.

Resuelvo ecuaciones con agilidad.

logrado	en pro- ceso	no logra- do

Ángulo	seno	coseno	tangente
0°	0.000	1.000	0.000
1°	0.018	1.000	0.018
2°	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.996	0.088
6°	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.993	0.123
8°	0.139	0.990	0.141
9°	0.156	0.988	0.158
10°	0.174	0.985	0.176
11°	0.191	0.982	0.194
12°	0.208	0.978	0.213
13°	0.225	0.974	0.231
14°	0.242	0.970	0.249
15°	0.259	0.966	0.268
16°	0.276	0.961	0.287
17°	0.292	0.956	0.306
18°	0.309	0.951	0.325
19°	0.326	0.946	0.344
20°	0.342	0.940	0.364
21°	0.358	0.934	0.384
22°	0.375	0.927	0.404
23°	0.391	0.921	0.425
24°	0.407	0.914	0.445
25°	0.423	0.906	0.466
26°	0.438	0.899	0.488
27°	0.454	0.891	0.510
28°	0.470	0.883	0.532
29°	0.485	0.875	0.554
30°	0.500	0.866	0.577
31°	0.515	0.857	0.601
32°	0.530	0.848	0.625
33°	0.545	0.839	0.649
34°	0.559	0.829	0.675
35°	0.574	0.819	0.700
36°	0.588	0.809	0.727
37°	0.602	0.799	0.754
38°	0.616	0.788	0.781
39°	0.629	0.777	0.810
40°	0.643	0.766	0.839
41°	0.656	0.755	0.869
42°	0.669	0.743	0.900
43°	0.682	0.731	0.933
44°	0.695	0.719	0.966
45°	0.707	0.707	1.000

Ángulo	seno	coseno	tangente
46°	0.719	0.695	1.036
47°	0.731	0.682	1.072
48°	0.743	0.669	1.111
49°	0.755	0.656	1.150
50°	0.766	0.643	1.192
51°	0.777	0.629	1.235
52°	0.788	0.616	1.280
53°	0.799	0.602	1.327
54°	0.809	0.588	1.376
55°	0.819	0.574	1.428
56°	0.829	0.559	1.483
57°	0.839	0.545	1.540
58°	0.848	0.530	1.600
59°	0.857	0.515	1.664
60°	0.866	0.500	1.732
61°	0.875	0.485	1.804
62°	0.883	0.470	1.881
63°	0.891	0.454	1.963
64°	0.899	0.438	2.050
65°	0.906	0.423	2.145
66°	0.914	0.407	2.246
67°	0.921	0.391	2.356
68°	0.927	0.375	2.475
69°	0.934	0.358	2.605
70°	0.940	0.342	2.747
71°	0.946	0.326	2.904
72°	0.951	0.309	3.078
73°	0.956	0.292	3.271
74°	0.961	0.276	3.487
75°	0.966	0.259	3.732
76°	0.970	0.242	4.011
77°	0.974	0.225	4.331
78°	0.978	0.208	4.705
79°	0.982	0.191	5.145
80°	0.985	0.174	5.671
81°	0.988	0.156	6.314
82°	0.990	0.139	7.115
83°	0.993	0.122	8.144
84°	0.995	0.105	9.514
85°	0.996	0.087	11.430
86°	0.998	0.070	14.300
87°	0.999	0.052	19.081
88°	0.999	0.035	28.640
89°	1.000	0.018	57.289
90°	1.000	0.000	Inf.



